

TD N°10

Probabilités (I)

1 Probabilités, espaces probablisés

Exercice 1. Soient $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ une application et $\mathcal{T}'$ une tribu sur Ω' . Vérifier que $\mathcal{T} = \{f^{-1}(A'), A' \in \mathcal{T}'\}$ définit une tribu sur Ω .

Exercice 2. Soit Ω un ensemble infini.

1. Montrer que $\mathcal{T} = \{A \subset \Omega, A \text{ ou } \bar{A} \text{ est au plus dénombrable}\}$ est une tribu sur Ω .

2. On suppose Ω infini non dénombrable. Montrer que $\mathbb{P}$ définie par $\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ au plus dénombrable} \\ 1 & \text{si } \bar{A} \text{ au plus dénombrable} \end{cases}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que $\mathbb{P}(\{n\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Exercice 4. À quelles conditions sur la suite réelle (a_n) existe-t-il une probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace probablisé $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ vérifiant $\mathbb{P}(\{n, n+1, n+2, \dots\}) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Une urne contient n boules (indiscernables au toucher) numérotées de 1 à n . On tire successivement avec remise N boules. On considère les événements :

$A = \text{« le résultat obtenu comporte au moins deux numéros distincts »}$

$B = \text{« le résultat obtenu comporte les boules 1, 2 et 3 »}$

On pose : $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket^N$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme.

1. Calculer $\mathbb{P}(A)$. **Indication :** considérer l'événement contraire.

2. Calculer $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 6. Inégalités de Fatou. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de l'espace probablisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On pose $A_* = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq p} A_n$ et $A^* = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq p} A_n$.

1. Vérifier que A_* et A^* sont des événements.

2. Montrer que $A_* \subset A^*$.

3. Montrer les inégalités $\mathbb{P}(A_*) \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\inf_{n \geq p} \mathbb{P}(A_n) \right)$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sup_{n \geq p} \mathbb{P}(A_n) \right) \leq \mathbb{P}(A^*)$.

Exercice 7. On lance indéfiniment un dé équilibré. On introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les événements

$A_n = \text{« On obtient pour la première fois la valeur 'six' lors du } n\text{-ième lancer »}$.

$D_n = \text{« On obtient la valeur 'six' lors du } n\text{-ième lancer »}$.

$A = \text{« On n'obtient jamais de six lors de l'expérience »}$.

1. Écrire A_n en fonction de $D_1, \dots, D_n$. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.

2. Montrer que l'événement A est négligeable.

3. Montrer qu'il est presque sûr d'obtenir une infinité de 'six'.

Exercice 8. 1. Montrer qu'on définit une probabilité sur $\mathbb{N}^*$ en posant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{n(n+1)}$.

2. Calculer la probabilité qu'un entier soit pair.

Exercice 9. Lemme de Borel-Cantelli. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$. On pose $A^* = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p$.

1. On suppose que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer que $\mathbb{P}(A^*) = 0$.

2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels dans $[0, 1[$. Démontrer que

$$\text{La série } \sum_{n \geq 0} a_n \text{ diverge} \implies \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=0}^N (1 - a_n) = 0.$$

3. On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge et que les événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants. Montrer que $\mathbb{P}(A^*) = 1$.

Exercice 10. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

1. Démontrer $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n \mathbb{P}(\overline{A_k})$.

2. On suppose $\mathbb{P}(A_n) \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- a. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$; b. La série $\sum \ln(\mathbb{P}(\overline{A_n}))$ diverge ; c. La série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

2 Probabilités conditionnelles et indépendance

Exercice 11. On lance deux dés à 6 faces équilibrés. On note A l'événement « la somme des deux dés égale à 8 ».

1. Calculer $\mathbb{P}(A)$.

2. Maintenant, si on lance d'abord le premier dé et que l'on note B l'événement « on a fait 3 » calculer alors $\mathbb{P}_B(A)$.

Exercice 12. Je lance deux dés à 6 faces équilibrés, que je cache tout de suite avec la main. On note A l'événement « obtenir un 6 ».

1. Calculer $\mathbb{P}(A)$.

2. Maintenant, je découvre un des deux dés cachés, sans vous dire lequel. Je vous demande alors :

« un de deux porte le chiffre 3. Quelle est la probabilité que l'autre porte un 6 ».

Exercice 13. Une urne contient une boule blanche. Un joueur lance un dé équilibré à six faces. S'il obtient un 'six', il tire une boule dans l'urne. Sinon, il rajoute une boule rouge dans l'urne et répète la manipulation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit les événements suivants :

A_n = « Le joueur obtient pour la première fois un 'six' lors du n -ième lancer ».

A_∞ = « Le joueur n'obtient jamais de 'six' ».

B = « La boule tirée est blanche ».

On rappelle que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(A_\infty)$.

2. En déduire $\mathbb{P}(B)$.

3. On suppose que le joueur a tiré la boule blanche. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas d'autres boules dans l'urne ?

Exercice 14. Une urne contient $2n$ boules dont n blanches et n noires. On tire successivement et sans remise n boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules blanches ?

2. Quelle est la probabilité de tirer en alternance une boule blanche et une boule noire, en commençant par une blanche ?

3. Quelle est la probabilité de ne tirer qu'une boule blanche ?

Exercice 15. Un promeneur capricieux se promène entre deux maisons, nommées A et B . À l'instant 0, il est en A . À chaque instant, il joue au dé la maison vers laquelle il va. S'il tire 1 ou 6, il change de maison, sinon il y reste. On définit les événements A_n « le promeneur est en A à l'instant n » et B_n « le promeneur est en B à l'instant n ».

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $b_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Établir une relation entre a_{n+1} , b_{n+1} , a_n et b_n .

2. En déduire $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$ en fonction de n .

3. Calculer $\mathbb{P}(A_j | A_i)$ avec $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ et $i < j$.

4. Les événements A_i et A_j pour $i < j$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 16. Urne de Pólya. Soit $(b, r, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Dans une urne contenant b boules et r boules rouges, on effectue un tirage, puis l'on remet la boule tirée avec c boules de la même couleur. On répète alors l'opération. En notant A_n l'événement « le n -ième tirage amène une boule bleue ».

1. Calculer $\mathbb{P}(A_1)$ puis, montrer que $\mathbb{P}(A_2) = \frac{b}{b+r}$.
2. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathbb{P}(A_n) = \frac{b}{b+r}$.

Exercice 17. Indicatrice d'Euler. Soit n un entier ≥ 2 . On note $\varphi(n) = \text{Card} \left\{ k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \wedge n = 1 \right\}$ l'indicatrice d'Euler.

Soit $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ la décomposition de n en facteurs de nombres premiers.

On tire au hasard un entier compris entre 1 et n . On note A l'événement « le nombre obtenu est premier avec n », et pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on note A_i l'événement « le nombre obtenu est divisible par p_i ».

1. Définir un espace probabilisé modélisant l'expérience aléatoire.
2. Exprimer $\mathbb{P}(A)$ en fonction de $\varphi(n)$ et n .
3. Montrer que $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{p_i}$.
4. Montrer que les événements $A_1, \dots, A_r$ sont mutuellement indépendants.
5. Exprimer A en fonction des A_i et en déduire que $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

Exercice 18. Loi Zêta. Soit $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite des nombres premiers et, pour $s > 1$, $\zeta(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{-s}$.

1. Pour quels $\lambda \in \mathbb{R}$, la famille $(\lambda n^{-s})_{n \in \mathbb{N}^*}$ définit-elle une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$?
2. Pour p nombre premiers, on pose $A_p = p\mathbb{N}^*$. Montrer que les $(A_{p_k})_{k \geq 1}$ sont mutuellement indépendants pour la loi de probabilité précédente.
3. Prouver

$$\zeta(s) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - p_k^{-s}}.$$

4. La famille $(p_k)_{k \geq 1}$ est-elle sommable ? **Indication** : raisonner par l'absurde et utiliser $\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1^+} +\infty$.

Exercice 19. Tirage avec remise - loi binomiale. Soit F un ensemble fini et $\{F_1, F_2\}$ une partition de $F : F = F_1 \uplus F_2$ avec $F_1 \neq \emptyset, F_2 \neq \emptyset$. Nous noterons $\text{Card } F_1 = N_1$ et $\text{Card } F_2 = N - N_1$.

Nous effectuons un tirage au hasard avec remise de n éléments dans l'ensemble F .

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note A_k l'événement « le résultat obtenu contient exactement k éléments de F_1 ».

1. Définir un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ modélisant l'expérience aléatoire.
2. Calculer $\text{Card}(A_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
3. Déterminer $\mathbb{P}(A_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Exercice 20. Tirage avec remise - loi multinomiale. Soit F un ensemble fini et $\{F_1, \dots, F_m\}$ une partition de $F, m \geq 2 :$

$F = \biguplus_{i=1}^m F_i$ avec $F_1 \neq \emptyset, \dots, F_m \neq \emptyset$. Nous noterons $\text{Card } F_i = N_i$ pour tout $1 \leq i \leq m$.

Nous effectuons un tirage au hasard avec remise de n éléments dans l'ensemble F .

On note $A_{k_1, \dots, k_m}$ l'événement « le résultat obtenu contient exactement k_i éléments de F_i pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ».

1. Définir un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ modélisant l'expérience aléatoire.
2. Calculer $\text{Card}(A_{k_1, \dots, k_m})$.
3. Déterminer $\mathbb{P}(A_{k_1, \dots, k_m})$.

Exercice 21. Tirage sans remise - loi hypergéométrique. Soit F un ensemble fini et $\{F_1, F_2\}$ une partition de $F : F = F_1 \uplus F_2$ avec $F_1 \neq \emptyset, F_2 \neq \emptyset$. Nous noterons $\text{Card } F_1 = N_1$ et $\text{Card } F_2 = N - N_1$.

Nous effectuons un tirage au hasard sans remise de n éléments dans l'ensemble F .

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note A_k l'événement « le résultat obtenu contient exactement k éléments de F_1 ».

1. Définir un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ modélisant l'expérience aléatoire.
2. Calculer $\text{Card}(A_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
3. Déterminer $\mathbb{P}(A_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Exercice 22. Tirage sans remise - hypergéométrique en dimension supérieure. Soit F un ensemble fini et $\{F_1, \dots, F_m\}$ une partition de F , $m \geq 2$: $F = \bigsqcup_{i=1}^m F_i$ avec $F_1 \neq \emptyset, \dots, F_m \neq \emptyset$. Nous noterons $\text{Card } F_i = N_i$ pour tout $1 \leq i \leq m$. Nous effectuons un tirage au hasard sans remise de n éléments dans l'ensemble F .

On note $A_{k_1, \dots, k_m}$ l'événement « le résultat obtenu contient exactement k_i éléments de F_i pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ».

1. Définir un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ modélisant l'expérience aléatoire.
2. Calculer $\text{Card}(A_{k_1, \dots, k_m})$.
3. Déterminer $\mathbb{P}(A_{k_1, \dots, k_m})$.

Exercice 23. Pile ou face à n lancers d'une pièce équilibrée. Considérons un jeu de pile ou face à n lancers successifs sur lequel nous faisons l'hypothèse d'équiprobabilité et notons, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, A_i l'événement « le i -ième lancer donne pile ». En convenant que 0 représente le résultat « face » et 1 le résultat « pile ».

1. Définir un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ modélisant l'expérience aléatoire.
2. Montrer que les événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants.

Exercice 24. Pile ou face à n lancers d'une pièce non nécessairement équilibrée. Considérons un jeu de pile ou face à n lancers successifs, avec une pièce non nécessairement équilibrée, qui tombe sur pile avec probabilité $p \in [0, 1]$. En convenant que 0 représente le résultat « face » et 1 le résultat « pile ».

1. Définir un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$ modélisant l'expérience aléatoire.
2. Soit $f : \{0, 1\} \rightarrow \{p, 1-p\}$ définie par $f(0) = 1-p$ et $f(1) = p$. Posons :

$$\forall \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega, \quad \mathbf{p}_\omega = \prod_{i=1}^n f(\omega_i) \geq 0.$$

Montrer que la famille de réels positifs $(\mathbf{p}_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est sommable et de somme égale à 1.

Soit alors $\mathbb{P}$ (l'unique probabilité) définie sur $(\Omega, \mathcal{T})$ par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbf{p}_\omega \quad \text{et} \quad \forall A \in \mathcal{T}, \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{p}_\omega.$$

3. Notons, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, A_j l'événement « le j -ième lancer donne pile ». Montrer que les événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants.

3 Variables aléatoires réelles : généralités

Exercice 25. Pour quels $a \in \mathbb{R}$, existe-t-il une v.a.r X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\mathbb{P}(X = n) = \frac{a}{n(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 26. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r qui converge simplement vers X . On pose $A = \left\{ X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X \right\} = \left\{ \omega \in \Omega, \quad X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X(\omega) \right\}$.

1. Montrer que $A = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \left\{ |X_n - X| \leq \varepsilon \right\}$.
2. En déduire que A est un événement.

Exercice 27. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \llbracket 2^j + 1, 2^{j+1} \rrbracket$, On pose

$$A_j = \left\{ \max_{2^{j+1} \leq n \leq 2^{j+1}} |X_n - X_{2^j}| > \frac{1}{j} \right\} \quad \text{et} \quad B_{j,m} = \left\{ |X_m - X_{2^j}| > \frac{1}{j} \quad \text{et} \quad \forall n \in \llbracket 2^j, m-1 \rrbracket, |X_n - X_{2^j}| \leq \frac{1}{j} \right\}.$$

1. Montrer que les événements $(B_{j,m})_{1 \leq m \leq j}$ sont deux à deux incompatibles.
2. Montrer que $A_j = \bigcup_{1 \leq m \leq j} B_{j,m}$.

Exercice 28. Fonction de répartition d'une v.a.r. constante. Soit X une v.a.r. constante égale à λ . Déterminer F_X la fonction de répartition de X .

Exercice 29. Variable indicatrice d'un événement. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{T}$. On pose $X = 1_A$.

1. Justifier que X est une v.a.r.
2. Calculer $F_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ puis tracer la courbe de F_X .

Exercice 30. Fonction de répartition de loi min-max. Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. indépendantes et de même loi. On pose $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$. Déterminer la fonction de répartition de Y et Z .

Exercice 31. Soit X une v.a.r à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k + 1) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k - 1).$$

Exercice 32. On jette simultanément deux dés. On note X la somme des résultats obtenus. Déterminer la loi de X .

Exercice 33. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X la v.a.r telle que : $X(\Omega) = \llbracket 1, 2n - 1 \rrbracket$ et

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{n^2} \quad \text{si } k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{2n - k}{n^2} \quad \text{si } k \in \llbracket n + 1, 2n - 1 \rrbracket.$$

Notons $Y = 2n - X$. Montrer que les v.a.r X et Y suivent la même loi.

Exercice 34. Considérons un jeu de pile ou face à n lancers successifs d'une pièce équilibrée. Notons $\Omega = \{0, 1\}^n$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, en convenant que 0 représente le résultat « face » et 1 le résultat « pile » et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Soit X_k , $1 \leq k \leq n$ le numéro obtenu lors du k -ième lancer. On définit la variable aléatoire T par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega) = \min \left\{ k \in \mathbb{N}^*, \quad X_k(\omega) = 1 \right\},$$

et on convient que $T(\omega) = n + 1$ si $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad X_k(\omega) = 0$. La v.a.r T est le numéro du lancer pour lequel on obtient « pile » pour la première fois.

1. Calculer $\text{Card}(X_k = 1)$ et $\text{Card}(X_k = 0)$ pour $1 \leq k \leq n$.
2. Déterminer $\mathbb{P}(T = k)$ pour $1 \leq k \leq n + 1$.

Exercice 35. Soit T une v.a.r à valeurs naturelles vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(T > n) > 0$.

On appelle taux de panne associé à T la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ déterminée par : $\theta_n = P(T = n \mid T \geq n)$.

1. Justifier $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \theta_n \in [0, 1[$.
2. Exprimer en fonction des termes de la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la probabilité $P(T \geq n)$. En déduire la divergence de la série $\sum \theta_n$.
3. Inversement, soit $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \theta_n \in [0, 1[$ et la série $\sum \theta_n$ diverge. Montrer que la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un taux de panne associé à une certaine variable aléatoire T .