

TD N°10

Probabilités (II) (correction)

1 Variables aléatoires réelles discrètes

Corrigé de l'exercice 1. Les $X_n(\Omega)$ sont au plus dénombrables et $Y(\Omega) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n(\Omega)$ donc $Y(\Omega)$ est au plus dénombrable (réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables). De plus, pour tout $y \in Y(\Omega)$

$$(Y = y) = (X_N = y) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (N = n, X_n = y) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{(\{N = n\} \cap \{X_n = y\})}_{\in \mathcal{T}} \in \mathcal{T}.$$

D'où Y est une v.a.r.d.

Corrigé de l'exercice 2. 1. T est le temps d'attente du premier 'six' :

$$T: \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$$

$$\omega \longmapsto \begin{cases} \min \{n \in \mathbb{N}^*, X_n(\omega) = 6\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N}^*, X_n(\omega) = 6\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{si } \{n \in \mathbb{N}^*, X_n(\omega) = 6\} = \emptyset \end{cases}.$$

T est une v.a.r.d car

- $T(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ qui est infini dénombrable.
- $(T = 1) = (X_1 = 6) \in \mathcal{T}$ et, pour $k \geq 2$, $(T = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{(X_i = 6)} \right) \cap (X_k = 6) \in \mathcal{T}$.
- $(T = +\infty) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{(X_n = 6)} \in \mathcal{T}$.

2. $\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 6) = \frac{1}{6}$ et pour $k \geq 2$,

$$\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{(X_i = 6)}\right) \cap (X_k = 6)\right) = \mathbb{P}(X_k = 6) \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(\overline{(X_i = 6)}) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

$$\text{Enfin, } \mathbb{P}(T = +\infty) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{(X_n = 6)}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^N \overline{(X_n = 6)}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \mathbb{P}(\overline{(X_n = 6)}) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^N = 0.$$

Corrigé de l'exercice 3. $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $Z(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et, pour $k \in Z(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j, Y = k - j) = \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}(X = j, Y = k - j) = \sum_{j=1}^{k-1} \mathbb{P}(X = j) \mathbb{P}(Y = k - j)$$

$$\text{donc } \mathbb{P}(Z = k) = \sum_{j=1}^{k-1} p(1-p)^{j-1} p(1-p)^{k-j-1} = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}.$$

Corrigé de l'exercice 4. $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\mathbb{P}(X \in 2\mathbb{N}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (X = 2k)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda} \cosh(\lambda) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}.$$

Corrigé de l'exercice 5. Soit $\omega \in \Omega$ et $A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ 0 & Y(\omega) \end{pmatrix}$. On a $\text{Sp}(A(\omega)) = \{X(\omega), Y(\omega)\}$.

- Si $X(\omega) = Y(\omega)$ alors $A(\omega)$ est diagonalisable si, et seulement si, $A(\omega) = I_2$. Mais $A(\omega) \neq I_2$.
- Si $X(\omega) \neq Y(\omega)$ alors $A(\omega)$ admet deux valeurs propres distinctes donc diagonalisable.

Ainsi A est diagonalisable si, et seulement si, $(X \neq Y)$. Or $(X = Y) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (X = n, Y = n)$ et par indépendance

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} pq((1-p)(1-q))^{n-1} = \frac{pq}{p+q-pq}.$$

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}(X \neq Y) = 1 - \mathbb{P}(X = Y) = \frac{p+q-2pq}{p+q-pq}.$$

Corrigé de l'exercice 6. 1. $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ muni de la loi uniforme. On sait que $X \sim \mathcal{B}(2, 1/2)$ et $Y \sim \mathcal{B}(2, 1/2)$ donc $X(\Omega) \times Y(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket^2$.

Posons $p_{i,j} = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket^2$.

- $(X = 0, Y = 0) = \{(1, 3), (3, 1), (1, 1), (3, 3)\}$, donc $p_{0,0} = 1/9$.
- $(X = 0, Y = 1) = \{(1, 5), (3, 5), (5, 1), (5, 3)\}$, donc $p_{0,1} = 1/9$.
- $(X = 0, Y = 2) = \{(5, 5)\}$, donc $p_{0,2} = 1/36$.
- $(X = 1, Y = 0) = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$, donc $p_{1,0} = 1/9$.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/9	1/9	1/36
1	1/9	5/18	1/9
2	1/36	1/9	1/9

2.

x	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x)$	1/4	1/2	1/4

 et

y	0	1	2
$\mathbb{P}(Y = y)$	1/4	1/2	1/4

On retrouve que $X \sim \mathcal{B}(2, 1/2)$ et $Y \sim \mathcal{B}(2, 1/2)$.

3. $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 1/9 \neq 1/16 = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Corrigé de l'exercice 7. $X(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$. On a

$$(Y = 1) \iff (\cos(\pi X) = 1) \underbrace{\iff}_{\text{car } X \geq 0} (\pi X \in 2\pi\mathbb{N}) \iff (X \in 2\mathbb{N}).$$

- $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}\left(\biguplus_{k \in \mathbb{N}} (X = 2k)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda} \cosh(\lambda).$
- $\mathbb{P}(Y = -1) = 1 - \mathbb{P}(Y = 1) = 1 - e^{-\lambda} \cosh(\lambda).$

Corrigé de l'exercice 8. 1. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Si $0 \leq k \leq n$, alors

$$\mathbb{P}(X = n, Y = k) = \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}_{(X=n)}(Y = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Si $k > n$, alors $\mathbb{P}(X = n, Y = k) = 0$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. $\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (1-p)^n \lambda^n = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$. Ainsi la variable Y suit une loi de Poisson de paramètre λp .

Corrigé de l'exercice 9. 1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = m) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a}{n!m!} = a \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \right) = a e^2$ donc $a = e^{-2}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{P}(X = n) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = m) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{n!m!} = \frac{e^{-1}}{n!}$ et de même $\mathbb{P}(Y = m) = \frac{e^{-1}}{m!}$.

3. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. $\mathbb{P}(X = n, Y = m) = \frac{e^{-2}}{n!m!} = \frac{e^{-1}}{n!} \frac{e^{-1}}{m!} = \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(Y = m)$ donc X et Y sont indépendantes.

Corrigé de l'exercice 10. 1. Considérons la partition $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}^2$ définie par $I_k = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2, m + n = k\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par sommation par paquets, on a

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \mathbb{P}(X = n, Y = m) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{(m,n) \in I_k} a \frac{n+m}{2^{n+m}} \right) = a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} \left(\sum_{(m,n) \in I_k} 1 \right) = a \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k+1)}{2^k}.$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k+1)}{2^k} &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(2)} \Big|_{x=1/2} + \left(\frac{1}{1-x} \right)' \Big|_{x=1/2} \\ &= \frac{1}{4} \times 16 + 4 = 8 \end{aligned}$$

et par suite $\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \mathbb{P}(X = n, Y = m) = 8a$ donc $a = 1/8$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = n) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = m) \\ &= \frac{1}{8} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{n+m}{2^{n+m}} \\ &= \frac{n}{2^{n+3}} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m + \frac{1}{2^{n+3}} \sum_{m=0}^{+\infty} m \left(\frac{1}{2}\right)^m \\ &= \frac{n}{2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+4}} \left(\frac{1}{1-x}\right)' \Big|_{x=1/2} \\ &= \frac{n+1}{2^{n+2}}.\end{aligned}$$

On trouve de même $\mathbb{P}(Y = m) = \frac{m+1}{2^{m+2}}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

3. $\mathbb{P}(X = n, Y = m) \neq \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = m)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

$$4. \mathbb{P}(X = Y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = Y, Y = m) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = m, Y = m) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m}{2^{2m+2}} = \frac{1}{16} \sum_{m=1}^{+\infty} m \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{1-x}\right)' \Big|_{x=1/4} = \frac{1}{9}.$$

Corrigé de l'exercice 11. 1. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$. On a $x_1 + \dots + x_n = k$ si, et seulement si, k des x_i valent 1 et les $(n-k)$ autres valent 0. Par suite $\text{card}(\Omega_k) = \binom{n}{k}$.

2. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$ et $S(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S = k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_k} ((X_1 = x_1) \cap \dots \cap (X_n = x_n))\right) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_k} \mathbb{P}((X_1 = x_1) \cap \dots \cap (X_n = x_n)) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_k} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

car parmi les x_i , k valent 1 donc k des $\mathbb{P}(X_i = x_i)$ valent p , $n-k$ valent 0 donc les $n-k$ autres $\mathbb{P}(X_i = x_i)$ valent $1-p$.

3. La v.a.r S suit une loi binomiale de paramètres n et p .

Corrigé de l'exercice 12. 1. La v.a.r S_n représente le nombre de piles que l'on obtient au cours des n premiers lancers. De plus S_n suit une loi binomiale de paramètres n et p .

2. L'expérience aléatoire nécessite au moins r lancers donc T_r est à valeurs dans $\{r+k, k \in \mathbb{N}\}$. De plus, pour $n \geq r$,

$$(T_r = n) = (S_{n-1} = r-1, X_n = 1) = (S_{n-1} = r-1) \cap (X_n = 1) \in \mathcal{T}$$

donc T_r est une v.a.r.d.

3. Soit $n \geq r$. Les v.a.r. S_{n-1} et X_n sont indépendantes, donc

$$\mathbb{P}(T_r = n) = \mathbb{P}((S_{n-1} = r-1) \cap (X_n = 1)) = \mathbb{P}(S_{n-1} = r-1) \mathbb{P}(X_n = 1) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} p.$$

Le changement d'indice $n = r+k$ donne $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T_r = r+k) = \binom{r+k-1}{r-1} p^r (1-p)^k$.

4. $T_r - r$ représente le nombre de faces que l'on obtient avant l'apparition du r -ième pile. Ainsi $T_1 - 1$ représente le nombre de faces que l'on obtient avant l'apparition du premier pile : elle suit la loi géométrique de paramètre p .

Corrigé de l'exercice 13. Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$. On a $\mathbb{P}(U = k) = P(U \geq k) - \mathbb{P}(U \geq k+1)$. Or

$$\mathbb{P}(U \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k) \mathbb{P}(Y \geq k) = \sum_{i=k}^N \mathbb{P}(X = i) \sum_{j=k}^N \mathbb{P}(Y = j) = \frac{(N-k+1)^2}{N^2}$$

$$\text{donc } \mathbb{P}(U = k) = \frac{(N-k+1)^2}{N^2} - \frac{(N-k)^2}{N^2} = \frac{2N-2k+1}{N^2}.$$

De même $\mathbb{P}(V = k) = \mathbb{P}(V \leq k) - \mathbb{P}(V \leq k-1)$. Or

$$\mathbb{P}(V \leq k) = \mathbb{P}(X \leq k) \mathbb{P}(Y \leq k) = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(X = i) \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(Y = j) = \frac{k}{N} \frac{k}{N} = \frac{k^2}{N^2}$$

$$\text{donc } \mathbb{P}(V = k) = \frac{k^2}{N^2} - \frac{(k-1)^2}{N^2} = \frac{2k-1}{N^2}.$$

Corrigé de l'exercice 14. $X(\Omega) = \{0, 1\}$ donc X suit une loi de Bernoulli. On a $(X = 1) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Y = 2k + 1)$ donc

$$\mathbb{P}(X = 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = 2k + 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{-\lambda} \cosh \lambda = \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2}.$$

Et donc X suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1 - e^{-2\lambda}}{2}$.

Corrigé de l'exercice 15. Notons A l'événement $\{\omega \in \Omega, M(\omega) \text{ inversible}\}$ et on cherche à calculer $\mathbb{P}(A)$. On a

$$A = \{\omega \in \Omega, \det M(\omega) \neq 0\} = \{\omega \in \Omega, X^2(\omega) - Y^2(\omega) \neq 0\} = \{\omega \in \Omega, X^2(\omega) \neq Y^2(\omega)\}.$$

Donc $\bar{A} = \{\omega \in \Omega, X^2(\omega) = Y^2(\omega)\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = Y(\omega)\}$ car X et Y sont à valeurs positives.

Ainsi $\bar{A} = (X = Y)$. Mais

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = Y, Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 (1-p)^{2(k-1)} = \frac{2}{2-p}.$$

$$\text{D'où } \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{2-2p}{2-p}.$$

Corrigé de l'exercice 16. $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - (X^2 - Y^2)$.

- Si $(X < Y)$ alors χ_M n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Si $X = Y$ alors $\chi_M(\lambda) = \lambda^2$ et M admet une seule valeur propre 0. Ainsi M est diagonalisable si, et seulement si, $M = 0$ ce qui est exclu.
- Si $(X > Y)$ alors M admet deux valeurs propres réelles distinctes. Ainsi M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

En résumé, M est diagonalisable si, et seulement si, $(X > Y)$. Or

$$\mathbb{P}(X > Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k, Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k) \mathbb{P}(Y = k).$$

$$\text{Mais } \mathbb{P}(X > k) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{j-1} = (1-p)^k \text{ donc } \mathbb{P}(X > Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^k q(1-q)^{k-1} = \frac{q-pq}{p+q-pq}.$$

Corrigé de l'exercice 17. 1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{P}(U \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k, Y \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k) \mathbb{P}(Y \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k)^2$ car X et Y ont même loi. Or $\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{j=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=k}^{+\infty} p(1-p)^{j-1} = (1-p)^{k-1}$ donc $\mathbb{P}(U \geq k) = (1-p)^{2(k-1)}$. Ainsi

$$\mathbb{P}(U = k) = \mathbb{P}(U \geq k) - \mathbb{P}(U \geq k+1) = (1-p)^{2(k-1)} - (1-p)^{2k} = (1-p)^{2(k-1)} (1 - (1-p)^2)$$

donc U suit une loi géométrique de paramètre $1 - (1-p)^2$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{P}(V \leq k) = \mathbb{P}(X \leq k, Y \leq k) = \mathbb{P}(X \leq k) \mathbb{P}(Y \leq k) = \mathbb{P}(X \leq k)^2$ car X et Y ont même loi. Or

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=1}^k p(1-p)^{j-1} = 1 - (1-p)^k$$

donc $\mathbb{P}(V \leq k) = (1 - (1-p)^k)^2$. Ainsi

$$\mathbb{P}(V = k) = \mathbb{P}(V \leq k) - \mathbb{P}(V \leq k-1) = (1 - (1-p)^k)^2 - (1 - (1-p)^{k-1})^2 = p(1-p)^{k-1} (2 - (2-p)(1-p)^{k-1}).$$

Corrigé de l'exercice 18. 1. $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Les v.a.r. X et Y sont indépendantes donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X+Y = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n-k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n-k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p(1-p)^{k-1} p(1-p)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=2}^n p^2 (1-p)^{n-2} = (n-1)p^2 (1-p)^{n-2}. \end{aligned}$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 2$. $\mathbb{P}_{[X+Y=n]}(X=k) = \frac{\mathbb{P}(X=k, X+Y=n)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} = \frac{\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}$.

• Si $k \geq n$, alors $\mathbb{P}_{[X+Y=n]}(X=k) = 0$.

• Si $k < n$, alors $\mathbb{P}_{[X+Y=n]}(X=k) = \frac{p(1-p)^{n-k-1}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}} = \frac{p}{n-1}(1-p)^{1-k}$.

Corrigé de l'exercice 19. 1. On doit avoir $\sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} \mathbb{P}(X=n, Y=k) = 1$. La famille $(\mathbb{P}(X=n, Y=k))_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ étant sommable donc par le théorème de Fubini :

$$\sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} \mathbb{P}(X=n, Y=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n, Y=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^k \lambda(1-p)^k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(1-p)^k = \lambda \sum_{j=1}^{+\infty} j(1-p)^{j-1}.$$

Or $\sum_{j=1}^{+\infty} j(1-p)^{j-1} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' \Big|_{x=1-p} = \frac{1}{p^2}$. Ainsi $\lambda = p^2$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{P}(X=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n, Y=k) = p^2 \sum_{k=n}^{+\infty} (1-p)^k = p(1-p)^n$ donc $X+1 \sim \mathcal{G}(p)$ et

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X+1) - \mathbb{E}(1) = \frac{1}{p} - 1, \quad \mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X+1) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. $\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n, Y=k) = p^2(k+1)(1-p)^k$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. $\mathbb{P}(Y-X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y-X=k, X=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n, Y=n+k) = p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^{n+k} = p(1-p)^k$ donc X et $Y-X$ suivent la même loi.

4. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. D'une part, $\mathbb{P}(X=n, Y-X=k) = \mathbb{P}(X=n, Y=n+k) = p^2(1-p)^{n+k}$ et, d'autre part

$$\mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y-X=k) = p(1-p)^n p(1-p)^k = p^2(1-p)^{n+k}$$

donc les v.a.r. X et $Y-X$ sont indépendantes. Ainsi $\mathbb{C}(X, Y-X) = 0$. Or $\mathbb{C}(X, Y-X) = \mathbb{C}(X, Y) - \mathbb{C}(X, X) = \mathbb{C}(X, Y) - \mathbb{V}(X)$ donc $\mathbb{C}(X, Y) = \frac{1-p}{p^2}$.

Corrigé de l'exercice 20. 1. Chaque joueur marque (ou non) indépendamment des autres, et donc on compte le nombre de succès au cours d'une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p . Ainsi $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

2. La probabilité qu'un joueur rate ses deux lancers est $(1-p)^2$ (par indépendance des deux lancers), et donc la probabilité qu'il marque au moins un des deux lancers est $1 - (1-p)^2$. On en déduit que $Z \sim \mathcal{B}(n, 1 - (1-p)^2)$.

3. Y représente le nombre de joueurs ayant marqué uniquement leur second lancer franc. Comme pour chaque joueur, ceci se produit avec probabilité $p(1-p)$, on en déduit que $Y \sim \mathcal{B}(n, p(1-p))$.

4. X et Y ne sont pas indépendantes car $\mathbb{P}(X=n) \neq 0$, $\mathbb{P}(Y=n) \neq 0$ mais $\mathbb{P}(X=n, Y=n) = 0$. De plus

$$\mathbb{C}(X, Y) = \frac{1}{2} (\mathbb{V}(X+Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)) = \frac{n}{2} ((1-p)^2(1 - (1-p)^2) - p(1-p) - p(1-p)(1 - p(1-p))) = -np^2(1-p).$$

Corrigé de l'exercice 21. 1. Chaque client se présente à la caisse i avec probabilité $\frac{1}{N}$, et ce, indépendamment du choix des autres clients. Puisqu'il y a n client, nous reconnaissons alors une loi usuelle : la loi de X_i sachant $[X=n]$ est une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{N}\right)$. Ainsi, on a

$$\mathbb{P}_{[X=n]}(X_i=k) = \begin{cases} \binom{n}{k} \frac{1}{N^k} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}.$$

On en déduit que X_i suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{N}$.

2. $X_1 + X_2$ est le nombre de clients ayant choisi l'une des deux premières caisses donc la loi de $X_1 + X_2$ sachant $[X=n]$ est une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{2}{N}\right)$. Comme dans la question précédente, $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{2\lambda}{N}$.

3. $\mathbb{C}(X_1, X_2) = \frac{1}{2} (\mathbb{V}(X_1 + X_2) - \mathbb{V}(X_1) - \mathbb{V}(X_2)) = \frac{1}{2} \left(\frac{2\lambda}{N} - \frac{\lambda}{N} - \frac{\lambda}{N} \right) = 0$.

4. Par la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{[X=n]}(X_1 = i, X_2 = j) \mathbb{P}(X = n)$$

Il faut choisir i personnes parmi n prenant la caisse 1, et donc j parmi $n - i$ prenant la caisse 2.

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=i+j}^{+\infty} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} \frac{1}{N^{i+j}} \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-i-j} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^{i+j}}{i!j!N^{i+j}} \sum_{n=i+j}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n-i-j} \frac{\lambda^{n-i-j}}{(n-i-j)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^{i+j}}{i!j!N^{i+j}} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{N}\right)^k \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-2\lambda/N} \frac{\lambda^{i+j}}{i!j!N^{i+j}} = \mathbb{P}(X_1 = i) \mathbb{P}(X_2 = j). \end{aligned}$$

Donc les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.

5. Notons que $X = X_1 + \dots + X_n$. On a donc $\mathbb{C}(X_1, X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{C}(X_1, X_i) = \mathbb{V}(X_1) = \frac{\lambda}{N}$. On en déduit que

$$\rho(X_1, X) = \frac{\mathbb{C}(X_1, X)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_1)\mathbb{V}(X)}} = \frac{\lambda\sqrt{N}}{N\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Corrigé de l'exercice 22. 1. X_i suit une loi de Bernoulli, et il nous faut donc déterminer la probabilité de $[X_i = 1]$ afin de caractériser entièrement cette loi. Mais $X_i = 1$ si et seulement si les m boules ont été placées dans d'autres urnes que l'urne numéro i . Pour chaque boule, la probabilité qu'elle ne soit pas dans l'urne i est $\frac{n-1}{n}$ et donc la probabilité de $[X_i = 1]$ est $\left(\frac{n-1}{n}\right)^m$ (par indépendance des choix successifs d'urne). Donc $X_i \sim \mathcal{B}\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^m\right)$.

2. On a $X = X_1 + \dots + X_n$ donc $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = n \left(\frac{n-1}{n}\right)^m$.

3. On a $\mathbb{C}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)$. Or, $X_i X_j$ ne prend que les valeurs 0 et 1 : elle suit une loi de Bernoulli. De plus on a $[X_i X_j = 1] = [X_i = 1, X_j = 1]$. Cet événement est réalisé si et seulement si les m boules ont toutes été placées dans une urne autre que les urnes i et j , ce qui, pour chaque boule, se produit avec probabilité $\frac{n-2}{n}$. On en déduit que $X_i X_j \sim \mathcal{B}\left(\left(\frac{n-2}{n}\right)^m\right)$. Et donc $\mathbb{E}(X_i X_j) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^m$.

Par suite, $\mathbb{C}(X_i, X_j) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^m - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2m} \neq 0$ et les variables aléatoires X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

Corrigé de l'exercice 23. 1. Il y a en tout $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ boules dans l'urne, dont k portent le numéro k . Et donc, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{2k}{n(n+1)}$. De plus

$$\mathbb{E}(X_1) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X_1 = k) = \sum_{k=1}^n \frac{2k^2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}.$$

2. Il y a en tout $\frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$ tirage possibles.

- Si $k \neq \ell$, il y a $k \times \ell$ tirages réalisant $(X_1 = k, X_2 = \ell)$.
- Si $k = \ell$, il y en a $k \times (k-1)$.

Donc la loi conjointe du couple (X_1, X_2) est donnée par $\mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = \ell) = \begin{cases} \frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)} & \text{si } k = \ell \\ \frac{4k\ell}{(n-1)n(n+1)(n+2)} & \text{sinon} \end{cases}$. Par la

formule des probabilités totales, on a pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = \ell) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = \ell) \\ &= \frac{4\ell(\ell-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^n \frac{4k\ell}{(n-1)n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)} \left(\ell^2 - \ell + \ell \sum_{k=1}^n k - \ell^2 \right) \\ &= \frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)} \left(\ell \frac{n(n+1)}{2} - \ell \right) = \frac{2\ell}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

3. X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes car $\mathbb{P}(X_1 = 1) \neq 0$, $\mathbb{P}(X_2 = 1) \neq 0$ et pourtant $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = 0$.

4. On a $\mathbb{C}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$. Notons que X_1 et X_2 ayant même loi, elles ont la même espérance donc $\mathbb{E}(X_2) = \frac{2n+1}{3}$.

Par le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1 X_2) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n k\ell \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = \ell) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^n \frac{4k^2\ell^2}{(n-1)n(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^n \frac{4k^3(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n k^2\ell^2 - \sum_{k=1}^n k^4 + \sum_{k=1}^n k^4 - \sum_{k=1}^n k^3 \right) \\ &= \frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=1}^n k^2 \sum_{\ell=1}^n \ell^2 - \frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) \\ &= \frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)} \left(\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36} - \frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) = \frac{4n(n+1)}{9}.\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\mathbb{C}(X_1, X_2) = \frac{4n(n+1)}{9} - \frac{(2n+1)^2}{9} = -\frac{1}{9}$. Enfin, pour obtenir le coefficient de corrélation linéaire, il nous faut calculer les variances de X_1 et de X_2 , qui sont égales car ces variables sont de même loi :

$$\mathbb{E}(X_1^2) = \sum_{k=1}^n k^2 \mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Et alors, par la formule de Huygens, $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(2n+1)^2}{9} = \frac{(n-1)(n+2)}{18}$. Finalement

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\mathbb{C}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_1)}\sqrt{\mathbb{V}(X_2)}} = -\frac{2}{(n-1)(n+2)}.$$

Corrigé de l'exercice 24. 1. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}((X \geq k) \cap (X \leq k)) \\ &= \mathbb{P}((X \geq k) \cap \overline{(X > k)}) \\ &= \mathbb{P}((X \geq k) \setminus (X > k)) \\ &= \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}((X \geq k) \cap (X > k)) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k).\end{aligned}$$

$$2. \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X > k-1) - \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n).$$

On a

$$0 \leq n\mathbb{P}(X > n) = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car la série $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ converge puisque X est d'espérance finie.

Ainsi $n\mathbb{P}(X > n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et par suite $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

3. On note, pour $1 \leq i \leq n$, X_i le nombre obtenu lors du i -ième tirage. On a $X = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$. Pour $1 \leq k \leq n$, on a par indépendance des X_i (car le tirage est avec remise) :

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \mathbb{P}(X_1 \leq k, \dots, X_p \leq k) = \prod_{i=1}^p \mathbb{P}(X_i \leq k).$$

Chaque X_i est suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ donc $\mathbb{P}(X_i \leq k) = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(X_i = j) = \frac{k}{n}$ donc $\mathbb{P}(X \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p$. D'après la première question, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)$ donc

$$\mathbb{P}(X = k) = 1 - \mathbb{P}(X \leq k-1) - (1 - \mathbb{P}(X \leq k)) = \mathbb{P}(X \leq k-1) - \mathbb{P}(X \leq k) = \frac{k^p - (k-1)^p}{n^p}.$$

4. $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$ est la somme de Riemann d'ordre n de la fonction $t \mapsto t^p$ sur l'intervalle $\llbracket 0, 1 \rrbracket$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 t^p dt = \frac{1}{p+1}.$$

D'après la première question,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 - \mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^p\right) = n \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{np}{p+1}$$

Corrigé de l'exercice 25. Pour $n \in (X+Y)(\Omega) = \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) \mathbb{P}(Y=n-k) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}.$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X+Y=n) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$ i.e. $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Corrigé de l'exercice 26. 1. Par définition du produit de deux polynômes $(X+1)^n (X+1)^m = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \right) X^k$ et $(X+1)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} X^k$. Par identification des coefficients des polynômes $(X+1)^{n+m}$ et $(X+1)^m (X+1)^n$, on obtient

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}.$$

2. On convient de noter $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$. Pour $k \in (X+Y)(\Omega) = \llbracket 0, n+m \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(X=i) \mathbb{P}(Y=k-i) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m+k-i-k} \\ &= p^k (1-p)^{m+n-k} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \\ &= \binom{m+n}{k} p^k (1-p)^{m+n-k}. \end{aligned}$$

D'où $\forall k \in \llbracket 0, m+n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X+Y=k) = \binom{m+n}{k} p^k (1-p)^{m+n-k}$ i.e. $X+Y \sim \mathcal{B}(m+n, p)$.

Corrigé de l'exercice 27. 1. On a $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ est fini, donc la famille $(k(k-1)\mathbb{P}(X=k))_{0 \leq k \leq n}$ est sommable. De plus

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1) p^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-2-k}}_{=1} = n(n-1) p^2. \end{aligned}$$

2. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et la famille $\left(\frac{1}{k} \mathbb{P}(X=k)\right)_{k \geq 1} = \left(\frac{p(1-p)^{k-1}}{k}\right)_{k \geq 1}$ est sommable car la série $\sum_{k \geq 1} \frac{p(1-p)^{k-1}}{k}$ converge (règle de d'Alembert). De plus

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^k}{k} = \frac{p \ln(1-p)}{p-1}.$$

Corrigé de l'exercice 28. On pose, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $u_{i,j} = \frac{1}{(i+j+1)2^{i+j-1}}$. Considérons la partition $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}^2$ définie par $I_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2, i+j=n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $((i+j)^2 u_{i,j})_{(i,j) \in I_n}$ est sommable car chaque I_n est fini. De plus, $\text{card}(I_n) = n+1$ et

$$\sum_{(i,j) \in I_n} (i+j)^2 u_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I_n} \frac{(i+j)^2}{(i+j+1)2^{i+j-1}} = \sum_{(i,j) \in I_n} \frac{n^2}{(n+1)2^{n-1}} = \frac{n^2}{(n+1)2^{n-1}} \text{card}(I_n) = \frac{n^2}{2^{n-1}}.$$

- La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2}{2^{n-1}}$ converge d'après la règle de d'Alembert.

D'où la famille $((i+j)^2 u_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et par suite $(X+Y)^2$ admet une espérance. Par sommation par paquets, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X+Y)^2) &= \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} (i+j)^2 u_{i,j} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{(i,j) \in I_n} (i+j)^2 u_{i,j} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(2)} \Big|_{x=1/2} + \left(\frac{1}{1-x} \right)' \Big|_{x=1/2} = 8 + 4 = 12. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 29. On considère la famille $(u_{i,k})_{(i,k) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ définie par $u_{i,k} = \begin{cases} \mathbb{P}(X=k) & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_k = \{(i, k), i \in \mathbb{N}^*\}$. La famille $(I_k)_{k \geq 1}$ forme une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$ et

$$\sum_{i \in \mathbb{N}^*} u_{i,k} = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(X=k) = k \mathbb{P}(X=k).$$

Donc X admet une espérance si, et seulement si, la famille $(u_{i,k})_{(i,k) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. Dans ce cas on a alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1} k \mathbb{P}(X=k) = \sum_{(i,k) \in (\mathbb{N}^*)^2} u_{i,k} = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_{i,k} \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=i}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq i).$$

Corrigé de l'exercice 30. 1. Soit $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$. On a

$$\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, |X^j| \leq \begin{cases} 1 & \text{si } |X| \leq 1 \\ |X^k| & \text{si } |X| \geq 1 \end{cases} \leq 1 + |X^k|.$$

Or $1 + |X^k|$ admet une espérance, par domination, X^j aussi. Ainsi, X admet un moment d'ordre j .

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$\left| (X + \alpha)^k \right| = \left| \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \alpha^{k-j} X^j \right| \leq \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} |\alpha|^{k-j} |X^j| \leq (1 + |X^k|) \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} |\alpha|^{k-j} \leq (1 + |\alpha|)^k (1 + |X^k|).$$

Or $1 + |X^k|$ admet une espérance, par domination, $(X + \alpha)^k$ aussi. Ainsi, $X + \alpha$ admet un moment d'ordre k .

Corrigé de l'exercice 31. $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ étant fini, donc X admet un moment d'ordre k et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^k) &= \sum_{j=0}^n j^k \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \\ &= \sum_{j=1}^n j^{k-1} n \binom{n-1}{j-1} p^j (1-p)^{n-j} \\ &= np \sum_{j=1}^n j^{k-1} \binom{n-1}{j-1} p^{j-1} (1-p)^{n-j} \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^{k-1} \underbrace{\binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j}}_{\mathbb{P}(Y=j)} \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} g(j) \mathbb{P}(Y=j) \quad \text{où } g(x) = (x+1)^{k-1}.\end{aligned}$$

D'où on obtient la formule récursive suivante :

$$\mathbb{E}(X^k) = np \mathbb{E}((Y+1)^{k-1}) \quad \text{où } Y \sim \mathcal{B}(n-1, p) \text{ si } n \geq 2 \text{ et } Y = 0 \text{ si } n = 1.$$

Corrigé de l'exercice 32. $X(\Omega)$ est au plus dénombrable donc on peut écrire $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. On a alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n).$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. On a $\left| X \cdot 1_{\{|X| \leq \lambda\}} \right| \leq |X|$ donc $X \cdot 1_{\{|X| \leq \lambda\}}$ est d'espérance finie et

$$\mathbb{E}\left(X \cdot 1_{\{|X| \leq \lambda\}}\right) = \sum_{\substack{n=0 \\ |x_n| \leq \lambda}}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n) + 0 \mathbb{P}(X > \lambda) = \sum_{\substack{n=0 \\ |x_n| \leq \lambda}}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(t) = \begin{cases} x_n \mathbb{P}(X = x_n) & \text{si } |x_n| \leq t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ et

$$\forall \lambda \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(\lambda)| \leq |x_n| \mathbb{P}(X = x_n).$$

Or la série $\sum_{n \geq 0} |x_n| \mathbb{P}(X = x_n)$ converge (de somme $\mathbb{E}(|X|)$). Ainsi la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$. Par le théorème de la double limite,

$$\mathbb{E}\left(X \cdot 1_{\{|X| \leq \lambda\}}\right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f_n(\lambda) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n) = \mathbb{E}(X).$$

2 Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

Corrigé de l'exercice 33. 1. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = (1-p+pt)^n(1-p+pt)^m = (1-p+pt)^{m+n}$$

donc $X+Y \sim \mathcal{B}(n+m, p)$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)} e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$ donc $X+Y \sim \mathcal{P}(\mu+\lambda)$.

Corrigé de l'exercice 34. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $G_S(t) = \prod_{k=1}^n G_{X_k}(t) = (G_{X_1}(t))^n = ((1-p)+pt)^n$ donc $S \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Corrigé de l'exercice 35. 1. La fonction génératrice de X est $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ qui est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$G_X^{(r)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-r+1) \mathbb{P}(X=n) t^n = \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)t^X) = \lambda^r e^{\lambda(t-1)}.$$

En particulier, $\mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) = G_X^{(r)}(1) = \lambda^r$.

2. La fonction génératrice de X est $G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$ qui est indéfiniment dérivable sur $\left] \frac{-1}{1-p}, \frac{1}{1-p} \right[$ et

$$G_X^{(r)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-r+1)\mathbb{P}(X=n)t^n = \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)t^X) = \frac{p}{1-p} \frac{r!(1-p)^r}{(1-(1-p)t)^{r+1}}.$$

En particulier, $\mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1)) = G_X^{(r)}(1) = \frac{r!(1-p)^{r-1}}{p^r}$.

Corrigé de l'exercice 36. 1. Soit $x \in]-1, 1[$. On a $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ par dérivation

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}$$

donc $\sum_{k=0}^{+\infty} n! \binom{k+n}{k} x^k = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. Ainsi $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$.

2. On a

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k)t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha \binom{k+r-1}{k} (1-p)^k t^k = \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+r-1}{k} ((1-p)t)^k = \frac{\alpha}{(1-(1-p)t)^r}$$

pour tout $t \in]-R, R[$ avec $R = \frac{1}{1-p}$. Or $G_X(1) = 1$ donc $\alpha = p^r$.

3. G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ (avec $R > 1$) donc au moins dérivable deux fois en 1 avec

$$G_X'(1) = \frac{r(1-p)}{p} \quad \text{et} \quad G_X''(1) = \frac{r(r+1)(1-p)^2}{p^2}$$

Pa suite, $\mathbb{E}(X) = G_X'(1) = \frac{r(1-p)}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$.

Corrigé de l'exercice 37. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et R le rayon de convergence de G_X . On a $G_X^{(k)}(t) = \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-k+1)t^X)$. Comme $R > 1$ alors $G_X^{(k)}$ est définie en 1 et $\mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-k+1)) = G_X^{(k)}(1)$.

Posons $n_j = n(n-1)\dots(n-j+1)$ pour $0 \leq j \leq k-1$. On peut écrire $n^k = \sum_{j=0}^{k-1} a_j n_j$ avec $a_j \in \mathbb{R}$ (récurrence sur k). Ainsi, par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{k-1} a_j X(X-1)\dots(X-j+1)\right) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-j+1)) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j G_X^{(j)}(1).$$

D'où X possède des moments de tout ordre.

Corrigé de l'exercice 38. 1. $S_N(\Omega) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X_1 + \dots + X_n)(\Omega)$, donc $S_N(\Omega)$ est au plus dénombrable. De plus, pour tout $y \in S_N(\Omega)$

$$\begin{aligned} S_N^{-1}(\{y\}) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \omega \in \Omega, \quad X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega) = y \quad \text{et} \quad N(\omega) = n \right\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{ \omega \in \Omega, \quad X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega) = y \right\}}_{\in \mathcal{T}} \cap \underbrace{\left\{ N(\omega) = n \right\}}_{\in \mathcal{T}} \end{aligned}$$

2. Par la formule des probabilités totales

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(S_N = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k) \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k = n)$$

donc $\forall t \in [-1, 1]$, $G_{S_N}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k) \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k = n) t^n}_{u_{n,k}}$.

La famille $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable. En effet :

- $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \quad |u_{n,k}| \leq \mathbb{P}(N = k) \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k = n)$.
- Par la formule des probabilités totales, la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(N = k) \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k = n)$ converge, et

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k = n) = \mathbb{P}(S_N = n),$$

donc la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_N = n)$ converge.

On peut donc intervertir les sommations :

$$\begin{aligned}
 G_{S_N}(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k) \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k = n) t^n \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k) G_{X_1 + \dots + X_k}(t) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k) G_X^k(t) = G_N(G_X(t)).
 \end{aligned}$$

3. G_N et G_X sont dérivables en 1 donc G_{S_N} aussi et

$$E(S_N) = G'_{S_N}(1) = G'_X(1) \underbrace{G'_N(G_X(1))}_{=1} = G'_X(1) G'_N(1) = E(N)E(X).$$

4. G_N et G_X sont deux fois dérivables en 1 donc G_{S_N} aussi et

$$\begin{aligned}
 V(S_N) &= G''_{S_N}(1) + G'_{S_N}(1) - (G'_{S_N}(1))^2 \\
 &= G''_X(1) \underbrace{G'_N(G_X(1))}_{=1} + (G'_X(1))^2 \underbrace{G''_N(G_X(1))}_{=1} + G'_X(1) G'_N(1) - (G'_X(1) G'_N(1))^2 \\
 &= G'_N(1) \left(\underbrace{G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2}_{=V(X)} \right) + (G'_X(1))^2 \left(\underbrace{G''_N(1) + G'_N(1) - (G'_N(1))^2}_{=V(N)} \right) \\
 &= E(N)V(X) + V(N)E(X)^2.
 \end{aligned}$$