

TD N°10

Probabilités (II)

1 Variables aléatoires réelles discrètes

Exercice 1. Soit (X_n) une suite de v.a.r.d. et N une v.a.r. à valeurs naturelles toutes définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$, $Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$. Justifier que Y est une v.a.r.d.

Exercice 2. On lance indéfiniment et indépendamment un dé équilibré. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la v.a.r. définie par la valeur du n -ième lancer. On introduit le temps d'attente du premier 'six' : $T = \min(\{n \in \mathbb{N}^*, X_n = 6\} \cup \{+\infty\})$.

1. Montrer que T est une v.a.r.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.
2. Déterminer la loi de T .

Exercice 3. Soit X et Y deux v.a.r.d. indépendantes. On suppose que celles-ci suivent une même loi géométrique de paramètre p . Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 4. Soit X une v.a.r. suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la probabilité que la valeur de X soit pair.

Exercice 5. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres $p, q \in]0, 1[$. Quelle est la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Exercice 6. On lance deux fois un dé équilibré. On note X le nombre de chiffres pairs obtenus et Y le nombre de chiffres supérieurs à 4 obtenus.

1. Donner la loi conjointe de $Z = (X, Y)$.
2. Déterminer les lois marginales X et Y .
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7. Soit X une v.a.r. telle que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $Y = \cos(\pi X)$.

Exercice 8. Soient X et Y deux v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que la loi de Y sachant $(X = n)$ est binomiale de paramètres n et $p \in]0, 1[$.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y) .
2. Reconnaître la loi de Y .

Exercice 9. Soient X et Y deux v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\mathbb{P}(X = n, Y = m) = \frac{a}{n!m!} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la valeur de a .
2. Déterminer les lois marginales de X et Y .
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 10. Soient X et Y deux v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}(X = n, Y = m) = a \frac{n+m}{2^{n+m}} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la valeur de a .
2. Déterminer les lois marginales X et Y .
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 11. Somme de Bernoulli indépendantes. Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. Notons, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\Omega_k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n, x_1 + \dots + x_n = k\}$ et $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. Calculer $\text{Card}(\Omega_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

3. En déduire la loi de S_n .

Exercice 12. Temps de r -ième apparition de « pile » - loi binomiale négative. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ fixé. Un joueur lance une pièce non nécessairement équilibrée, qui tombe sur pile avec probabilité $p \in [0, 1]$. On suppose que le joueur s'arrête lorsqu'il a obtenu « pile ». En convenant que 0 représente le résultat « face » et 1 le résultat « pile ». Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la v.a.r. définie par la valeur du n -ième lancer. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit le temps de r -ième apparition de « pile » :

$$T_r = \min \{n \in \mathbb{N}^*, S_n = r\},$$

avec la convention $\min \emptyset = +\infty$.

1. Que représente la v.a.r. S_n ? donner la loi de S_n .
2. Montrer que T_r est une v.a.r.d. à valeurs dans $\{r + k, k \in \mathbb{N}\}$.
3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T_r = r + k) = \binom{r+k-1}{r-1} p^r (1-p)^k$.
4. Que représente la v.a.r. $T_r - r$? reconnaître la loi de $T_1 - 1$.

Exercice 13. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes et suivant la même loi uniforme sur $[[1, N]]$, $N \geq 2$. Déterminer la loi de $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

Exercice 14. Soit Y une v.a.r. suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Soit X la v.a.r. égale à 0 si Y est paire et 1 si Y est impaire. Donner la loi de X .

Exercice 15. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité que M soit inversible.

Exercice 16. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et $q \in]0, 1[$. On pose $M = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & -X \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable.

Exercice 17. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Déterminer la loi de $U = \min(X, Y)$. Montrer que U suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.
2. Déterminer la loi de $V = \max(X, Y)$.

Exercice 18. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$.
2. Déterminer la loi de X sachant $[X + Y = n]$.

Exercice 19. Soit $p \in]0, 1[$, et soit (X, Y) un couple de v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est donnée par

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X = n, Y = k) = \begin{cases} \lambda(1-p)^k & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de λ .
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) . Quelle est la loi de $X + 1$? En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
3. Montrer que X et $Y - X$ suivent la même loi.
4. Montrer que X et $Y - X$ sont indépendantes. En déduire $\mathbb{C}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendante ?

Exercice 20. Soit $p \in]0, 1[$ et $n \geq 2$. On considère n joueurs de basket-ball qui tirent chacun deux lancers francs. On considère qu'à chaque lancer, un joueur a une probabilité p de marquer, et que les deux lancers sont indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué leur premier lancer franc, et Z la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué au moins un lancer franc.

1. Déterminer la loi de X .
2. Montrer que Z suit une loi binomiale, donner son espérance et sa variance.
3. On pose $Y = Z - X$. Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer sa loi.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathbb{C}(X, Y)$.

Exercice 21. On suppose que le nombre de personnes qui se présentent à l'entrée d'un cinéma en une heure est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le cinéma comporte $N \geq 3$ caisses, et on suppose que chaque personne choisit au hasard sa caisse parmi les N . Pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on note X_i le nombre de personnes ayant choisi la caisse numéro i .

1. Déterminer la loi de X_i conditionnellement à l'évènement $[X = n]$, puis la loi de X_i .
2. Déterminer, sans nouveaux calculs la loi de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de X_1 et X_2 .
4. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
5. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X_1 et X .

Exercice 22. D'après Maths II 2007. On dispose de n urnes dans lesquelles on répartit au hasard et de façon indépendante, m boules, de sorte que pour chaque boule, la probabilité d'être dans l'urne i , avec $1 \leq i \leq n$, soit égale à $\frac{1}{n}$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i la variable indicatrice de l'évènement « l'urne i est vide », et on note X la variable aléatoire égale au nombre d'urnes vides.

1. Déterminer la loi de X_i .
2. Exprimer X en fonction des X_i . En déduire l'espérance de X .
3. Pour $i \neq j$, déterminer la loi de $X_i X_j$ et en déduire $C(X_i, X_j)$. Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?

Exercice 23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant 1 boule numérotée 1, 2 boules numérotées 2, etc, n boules numérotées n . On tire deux boules, sans remise dans cette urne, et on note X_1 le numéro de la première boule et X_2 celui de la seconde.

1. Déterminer la loi de X_1 et calculer son espérance.
2. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2) et en déduire la loi de X_2 .
3. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\rho(X_1, X_2)$.

Exercice 24. D'après CCINP MP 2024. X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance finie.

1. Exprimer, pour k non nul, $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X > k - 1)$ et de $\mathbb{P}(X > k)$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n \mathbb{P}(X > n)$.

Démontrer le résultat de cours : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue, de façon équiprobable, p tirages successifs avec remise et on note X le plus grand nombre obtenu. Calculer, pour tout entier naturel k , $\mathbb{P}(X \leq k)$, puis donner la loi de X .

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$, puis en utilisant la première question, déterminer un équivalent pour n au voisinage de $+\infty$ de $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 25. Stabilité de la loi de Poisson. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. Montrer que $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Exercice 26. Stabilité de la loi binomiale.

1. Montrer que $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}$. **Indication :** considérons les polynômes $(X+1)^{n+m}$ et $(X+1)^m (X+1)^n$.
2. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes telles que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$. Montrer que $X + Y \sim \mathcal{B}(n+m, p)$.

Exercice 27. 1. Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$.

2. Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exercice 28. Soient X et Y deux v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{(i+j+1)2^{i+j-1}}$. Calculer $\mathbb{E}((X+Y)^2)$.

Exercice 29. Une autre expression de l'espérance. Soit X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$ converge.

Si tel est le cas, on a alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$.

Indication : appliquer le théorème de sommation par paquets à la famille $(u_{i,k})_{(i,k) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ avec $u_{i,k} = \mathbb{P}(X = k)$ si $i \leq k$ et 0 sinon.

Exercice 30. Soit X une v.a.r. admet un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Montrer que $|X^j| \leq 1 + |X^k|$. En déduire que X admet un moment d'ordre j .
2. Montrer que $X + \alpha$ admet un moment d'ordre k pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 31. Moments d'une loi binomiale. Soit X une v.a.r. telle que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X^k) = np\mathbb{E}((Y+1)^{k-1}) \text{ où } Y \sim \mathcal{B}(n-1, p) \text{ si } n \geq 2 \text{ et } Y = 0 \text{ si } n = 1.$$

Exercice 32. Soit X une v.a.r. discrète d'espérance finie. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(X \cdot 1_{\{|X| \leq \lambda\}}\right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X).$$

2 Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

Exercice 33. Stabilité de la loi binomiale et la loi de Poisson. À l'aide de la fonction génératrice, montrer que

1. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ avec X et Y indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.
2. Si $X \sim \mathcal{P}(\mu)$, $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec X et Y indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\mu + \lambda)$.

Exercice 34. Somme de Bernoulli indépendantes. Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. Montrer, en utilisant la fonction génératrice, que la v.a.r. $S = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p .

Exercice 35. Soit $r \in \mathbb{N}$.

1. Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. À l'aide de la fonction génératrice, calculer $\mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1))$.
2. Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$. À l'aide de la fonction génératrice, calculer $\mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-r+1))$.

Exercice 36. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in]0, 1[$ et X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \alpha \binom{k+r-1}{k} (1-p)^k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$. Montrer l'identité binomiale $\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$.
2. Déterminer la fonction génératrice de X et la valeur de α .
3. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 37. Soit X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Supposons le rayon de convergence de G_X est > 1 . Montrer que X possède des moments de tout ordre.

Exercice 38. Somme aléatoire de variables aléatoires, identités de Wald. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires suivant toutes une même loi de fonction génératrice G_X .

On suppose les variables aléatoires N et $(X_n)_{n \geq 1}$ sont mutuellement indépendantes et on pose $S_N = \sum_{k=1}^N X_k$.

1. Justifier que S_N est une variable aléatoire discrète.
2. Montrer que $G_{S_N} = G_N \circ G_X$.
3. En déduire que, Si N et X possèdent une espérance, alors $E(S_N) = E(N)E(X)$.
4. On suppose que N et X ont des moments d'ordre 2. Montrer $V(S_N) = V(X)E(N) + V(N)E(X)^2$.