

TD N°10

Probabilités (III) (correction)

1 Variables aléatoires réelles à densité

Corrigé de l'exercice 1. 1. Supposons $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$ donc $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t & \text{si } t \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$. On a

$$F_{a+(b-a)X}(t) = \mathbb{P}(a + (b-a)X \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-a}{b-a}\right) = F_X\left(\frac{t-a}{b-a}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 1 & \text{si } t \geq b \end{cases}$$

donc $f_{a+(b-a)X}(t) = F'_{a+(b-a)X}(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{si } t \notin [a, b] \end{cases}$. Ainsi $a + (b-a)X \sim \mathcal{U}([a, b])$.

Supposons $a + (b-a)X \sim \mathcal{U}([a, b])$. On a

$$F_X(t) = F_{a+(b-a)X}(a + (b-a)t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t & \text{si } t \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

donc $f_X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1] \end{cases}$. Ainsi $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

2. Supposons $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ donc $F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$. On a

$$F_{\lambda X}(t) = \mathbb{P}(\lambda X \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t}{\lambda}\right) = F_X\left(\frac{t}{\lambda}\right) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

donc $f_{\lambda X}(t) = F'_{\lambda X}(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$. Ainsi $\lambda X \sim \mathcal{E}(1)$.

Réciproquement, si $\lambda X \sim \mathcal{E}(1)$ alors $X = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ donc $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

3. Supposons $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On a $F_{(X-\mu)/\sigma}(t) = F_X(\mu + \sigma t)$ donc

$$f_{(X-\mu)/\sigma}(t) = \sigma f_X(\mu + \sigma t) = \sigma \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\mu + \sigma t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

donc $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Supposons $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On a $F_X(t) = F_{(X-\mu)/\sigma}((t-\mu)/\sigma)$ donc

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma} f_{(X-\mu)/\sigma}((t-\mu)/\sigma) = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{((t-\mu)/\sigma)^2}{2}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

donc $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Corrigé de l'exercice 2. 1. On doit avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$. Or $\int_2^{+\infty} \frac{a}{t \ln t} dt = a \left[\frac{-1}{\ln t} \right]_2^{+\infty} = \frac{a}{\ln 2}$ donc $a = \ln 2$.

2. Si $t \leq 2$ alors $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx = 0$. Si $t > 2$ alors

$$F_X(t) = \int_2^t \frac{\ln 2}{x \ln x} dx = \ln 2 \left[\frac{-1}{\ln x} \right]_2^t = 1 - \frac{\ln 2}{\ln t}.$$

Ainsi $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 2 \\ 1 - \frac{\ln 2}{\ln t} & \text{si } t > 2 \end{cases}$.

3. X admet une espérance si, et seulement si, $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc si, et seulement si, $\int_2^{+\infty} \frac{\ln 2}{\ln t} dt$ converge. Or $\frac{1}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln^2 t}\right)$ et $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge donc $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\ln^2 t}$ diverge. Ainsi X n'admet pas d'espérance.

Corrigé de l'exercice 3. Notons que Y prend ses valeurs dans $[0, 1]$ donc $F_Y(t) = 0$ si $t < 0$ et $F_Y(t) = 1$ si $t > 1$.

Pour $t \in [0, 1]$, on a $F_Y(t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t})$. Mais $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -1 \\ \frac{t+1}{2} & \text{si } t \in [-1, 1] \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

donc $F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \sqrt{t} & \text{si } t \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et donc Y est une variable

à densité. Par suite, une densité de Y est $f_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t}} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Corrigé de l'exercice 4. On a $f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$. Par le théorème de transfert, X admet un moment d'ordre k si,

et seulement si, $t \mapsto t^k f_X(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc si, et seulement si, $\int_0^{+\infty} \lambda t^k e^{-\lambda t} dt$ converge. Or $t \mapsto \lambda t^k e^{-\lambda t}$ est cpm sur $[0, +\infty[$ et $\lambda t^k e^{-\lambda t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda t^k e^{-\lambda t} dt$ converge. Par suite,

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_0^{+\infty} \lambda t^k e^{-\lambda t} dt \underset{\lambda t=s}{=} \frac{1}{\lambda^k} \underbrace{\int_0^{+\infty} s^k e^{-s} ds}_{\Gamma(k+1)} = \frac{k!}{\lambda^k}.$$

Corrigé de l'exercice 5. 1. La fonction F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ (car continue), croissante et $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1$: Il s'agit donc bien de la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

De plus, la fonction F étant continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (privé de l'ensemble vide) : c'est la fonction de répartition d'une v.a.r à densité.

Une densité de X est $F'(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

2. a. Puisque X et Y sont indépendantes, on a

$$F_Z(t) = \mathbb{P}(\max(X, Y) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t)\mathbb{P}(Y \leq t) = F^2(t) = \frac{1}{(1+e^{-t})^2}.$$

La fonction F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (privé de l'ensemble vide) donc Z est une variable à densité.

b. Une densité de Z est donnée par $F'_Z(t) = \frac{2e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

Corrigé de l'exercice 6. 1. La fonction f_a est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en a , et elle y est clairement positive car $a > 0$. De plus $\int_1^{+\infty} at^{-a-1} dt$ converge (car $a+1 > 0$) et $\int_1^{+\infty} at^{-a-1} dt = \left[\frac{1}{t^a}\right]_1^{+\infty} = 1$. Ainsi, f_a est bien une densité.

2. a. Si $t \leq 1$ alors $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = 0$. Si $t > 1$ alors

$$F_X(t) = \int_1^t \frac{a}{x^{a+1}} dx = \left[\frac{1}{x^a}\right]_1^t = 1 - \frac{1}{t^a}.$$

$$\text{Ainsi } F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{t^a} & \text{si } t > 1 \end{cases}.$$

b. X possède une espérance si, et seulement si, $t \mapsto tf_a(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc si, et seulement si, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{a}{t^a} dt$ converge. C'est le cas si et seulement si $a > 1$, et alors

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf_a(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{a}{t^a} dt = \frac{a}{a-1}.$$

De même, on montre que X possède un moment d'ordre 2 si et seulement si $a > 2$, et qu'alors

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_a(t) dt = \int_1^{+\infty} \frac{a}{t^{a+1}} dt = \frac{a}{a-2}.$$

Par la formule de Huygens, on a alors $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{a}{(a-1)^2(a-2)}$.

c. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(\ln X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq e^t) = F_X(e^t) = \begin{cases} 1 - e^{-at} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

On reconnaît là la fonction de répartition d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$, donc $Y \sim \mathcal{E}(a)$.

Corrigé de l'exercice 7. 1. Si $t \in [0, 1]$ alors $\sin(\pi t) \in [0, 1]$. La variable Y est à valeurs dans $[0, 1]$. On a donc pour $t < 0$, $F_Y(t) = 0$ et pour $t \geq 1$, $F_Y(t) = 1$. Si $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbb{P}(\sin(\pi X) \leq t) \\ &= \mathbb{P}(0 \leq \pi X \leq \arcsin t) + \mathbb{P}(\pi - \arcsin t \leq \pi X \leq \pi) \\ &= \mathbb{P}\left(0 \leq X \leq \frac{\arcsin t}{\pi}\right) + \mathbb{P}\left(1 - \frac{\arcsin t}{\pi} \leq X \leq 1\right) \\ &= F_X\left(\frac{\arcsin t}{\pi}\right) - F_X(0) - \left(F_X(1) - F_X\left(1 - \frac{\arcsin t}{\pi}\right)\right) \\ &= \frac{\arcsin t}{\pi} - 0 - \left(1 - \left(1 - \frac{\arcsin t}{\pi}\right)\right) = \frac{2 \arcsin t}{\pi}. \end{aligned}$$

La fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Elle possède donc une densité f définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t \leq 0$, alors $F_Y(t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t) = \mathbb{P}(X = 0) = 0$ et si $t > 0$, alors

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}).$$

La fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ est dérivable sauf en 0. Elle possède donc une densité f_Y définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{t}{2}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(\lceil \theta X \rceil = k) = \mathbb{P}(\theta X \in]k-1, k]) = \mathbb{P}\left(X \in \left]\frac{k-1}{\theta}, \frac{k}{\theta}\right]\right) = F_X\left(\frac{k}{\theta}\right) - F_X\left(\frac{k-1}{\theta}\right).$$

$$\text{Or } F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \text{ Par suite } \mathbb{P}(Y = k) = \exp\left(-\frac{k-1}{\theta}\right) - \exp\left(-\frac{k}{\theta}\right) = \left(1 - e^{-\frac{1}{\theta}}\right) \left(e^{-\frac{1}{\theta}}\right)^{k-1}.$$

Ainsi Y suit la loi géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-\frac{1}{\theta}}$.

Corrigé de l'exercice 8. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} (X_i) \leq t\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \leq t)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq t) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(t).$$

$$\text{Or } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, F_{X_i}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases} \text{ et par suite } F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t^n & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}. \text{ La fonction } F_Y \text{ est continue sur } \mathbb{R}$$

est dérivable sauf en 0 et 1. Elle possède donc une densité f_Y définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_Y(t) = \begin{cases} nt^{n-1} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Corrigé de l'exercice 9. 1. Par une intégration par parties,

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{9}{4} \int_0^{+\infty} x(1+x) e^{-3x} dx = \frac{5}{12}.$$

2. De même, par une intégration par parties et le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{9}{4} \int_0^{+\infty} x^2(1+x) e^{-3x} dx = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Par la formule de König-Huygens, on obtient } \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{25}{144} - \frac{1}{9} = \frac{23}{144}.$$

Corrigé de l'exercice 10. La v.a.r. $S = X + Y$ est à densité de densité donnée par

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, f_S(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(t-x) dx \\ &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x} 1_{[0,+\infty[}(x) e^{-\lambda(t-x)} 1_{[0,+\infty[}(t-x) dx \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^{+\infty} 1_{[0,+\infty[}(t-x) dx \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^t 1_{[0,+\infty[}(s) ds = \lambda^2 t e^{-\lambda t} 1_{]0,+\infty[}(t).\end{aligned}$$

D'où $S \sim \Gamma(2, \lambda)$.

Corrigé de l'exercice 11. La v.a.r. $S = X + Y$ est à densité de densité donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} 1_{]0,+\infty[}(x) \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} (t-x)^{\beta-1} e^{-\lambda(t-x)} 1_{]0,+\infty[}(t-x) dx.$$

Si $t \leq 0$, $f_S(t) = 0$. Si $t > 0$, on a

$$\begin{aligned}f_S(t) &= \frac{\lambda^{\alpha+\beta} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t x^{\alpha-1} (t-x)^{\beta-1} dx \\ &= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda t} \underbrace{\int_0^1 s^{\alpha-1} (1-s)^{\beta-1} ds}_{=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)} \quad \text{changement de variable } x = st \\ &= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} t^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

D'où $\forall t \in \mathbb{R}, f_S(t) = \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} t^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda t} 1_{]0,+\infty[}(t)$ i.e. $S \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$.

Corrigé de l'exercice 12. 1. On écrit $at^2 + 2bt + c = as^2 + d$ où $s = t + \frac{b}{a}$ donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+2bt+c)} dt$ converge si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(as^2+d)} ds$ converge. Or $e^{-(as^2+d)} =_{\pm\infty} o\left(\frac{1}{s^2}\right)$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+2bt+c)} dt$ converge. De plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+2bt+c)} dt = e^{-d} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-as^2} ds \underset{t=\sqrt{a}s}{=} \frac{e^{-d}}{\sqrt{a}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt}_{=\sqrt{\pi}} = e^{-d} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

2. La v.a.r $S = X + Y$ est à densité de densité donnée par

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, f_S(t) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(t-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{a}{2}x^2 - bx + \frac{c}{2}\right)\right) dx\end{aligned}$$

avec $a = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}$, $b = \frac{\mu_1\sigma_2^2 + (t-\mu_2)\sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}$ et $c = \frac{\mu_1^2\sigma_2^2 + (t-\mu_2)^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}$. D'après la première question

$$f_S(t) = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{2\pi a}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(c - \frac{b^2}{a}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t - (\mu_1 + \mu_2))^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right).$$

D'où $S \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Corrigé de l'exercice 13. 1. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx = \frac{a}{\pi} [\arctan(x/a)]_{-\infty}^t = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(t/a)}{\pi}$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $F_{\lambda X}(t) = \mathbb{P}(\lambda X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t/\lambda) = F_X(t/\lambda)$ donc $f_{\lambda X}(t) = F'_{\lambda X}(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda a}{(t^2 + (\lambda a)^2)}$ et $\lambda X \sim \mathcal{C}(\lambda a)$.

Corrigé de l'exercice 14. L'application $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{at} e^{-t^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par la formule de transfert

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at} e^{-t^2/2} dt = \frac{e^{a^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-a)^2/2} dt \underset{s=(t-a)/\sqrt{2}}{=} \frac{e^{a^2/2}}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds}_{=\sqrt{\pi}} = e^{a^2/2}.$$

Corrigé de l'exercice 15. $\forall k \in \mathbb{N}^*, t \mapsto \frac{t^k}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc X admet un moment d'ordre k et on a

$$\mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}((X - \mu + \mu)^k) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (X - \mu)^j \mu^{k-j}\right) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \mu^{k-j} \mathbb{E}((X - \mu)^j).$$

Or la v.a.r $X - \mu$ est centrée et $X - \mu \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Soit $p \in \mathbb{N}$.

- Si p est impair alors $\mathbb{E}((X - \mu)^p) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{t^p e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}_{\text{fonction impaire}} dt = 0$.
- Supposons $p = 2m$ pair. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X - \mu)^p) &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t^p e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \\ &= \frac{2^m \sigma^{2m}}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^{+\infty} s^{m-\frac{1}{2}} e^{-s} ds}_{=\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \quad \text{changement de variable } s = \frac{t^2}{2\sigma^2} \\ &= \frac{2^m \sigma^{2m}}{\sqrt{\pi}} \frac{(2m)!}{2^{2m} m!} \sqrt{\pi} = \frac{\sigma^{2m} (2m)!}{2^m m!}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \mathbb{E}(X^k) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ pair}}}^k \binom{k}{j} \mu^{k-j} \mathbb{E}((X - \mu)^j) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k}{2i} \mu^{k-2i} \frac{\sigma^{2i} (2i)!}{2^i i!}.$$

Corrigé de l'exercice 16. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = 1 - \mathbb{P}(Z > t) = 1 - \mathbb{P}(X > t, Y > t) = 1 - \mathbb{P}(X > t) \mathbb{P}(Y > t) = 1 - (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t)).$$

Si $t < 0$ alors $F_X(t) = F_Y(t) = 0$ donc $F_Z(t) = 0$. Si $t \geq 0$ alors $F_Z(t) = 1 - e^{-\lambda t} e^{-\mu t}$. Ainsi

$$F_Z(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda+\mu)t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On reconnaît là la fonction de répartition d'une v.a.r suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$: $Z \sim \mathcal{E}(\lambda + \mu)$.

Corrigé de l'exercice 17. 1. a. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $F_{-Y}(t) = \mathbb{P}(-Y \leq t) = \mathbb{P}(Y \geq -t) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq -t) = 1 - F_Y(-t)$ donc

$$F_{-Y}(t) = \begin{cases} 1 - 0 & \text{si } -t \leq 0 \\ 1 - \frac{-t-0}{a-0} & \text{si } 0 \leq -t \leq a \\ 1 - 1 & \text{si } -t \geq a \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ \frac{t+a}{a} & \text{si } -a \leq t \leq 0 \\ 0 & \text{si } t \leq -a \end{cases}.$$

$$\text{Une densité de } -Y \text{ est } f_{-Y}(t) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } -a \leq t \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

b. La densité de $X - Y = X + (-Y)$ est donnée par

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_{-Y}(t-x) dx = \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[0,a[}(x) 1_{[-a,0]}(t-x) dx = \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[0,a[}(x) 1_{[t,t+a]}(x) dx.$$

- Si $t < -a$ ou $t > a$ alors $[0, a[\cap [t, t+a] = \emptyset$ donc $g(t) = 0$.
- Si $-a \leq t \leq 0$ alors $g(t) = \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[0,t+a]}(x) dx = \frac{t+a}{a^2}$.
- Si $0 \leq t \leq a$ alors $g(t) = \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} 1_{[t,a]}(x) dx = \frac{a-t}{a^2}$.

$$\text{Ainsi } g(t) = \frac{a-|t|}{a^2} 1_{[-a,a]}(t) = \begin{cases} \frac{a-|t|}{a^2} & \text{si } -a \leq t \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. a. La v.a.r Z ne prend que des valeurs positives donc si $t < 0$ on a $H(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = 0$. Pour $t \geq 0$ on a

$$H(t) = \mathbb{P}(-t \leq X - Y \leq t) = \mathbb{P}(X - Y \leq t) - \mathbb{P}(X - Y < -t) = G(t) - G(-t).$$

b. H est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}_-$ de dérivée nulle. De plus H est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-a, 0, a\}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-a, 0, a\}, H'(t) = G'(t) + G'(-t) = g(t) + g(-t).$$

$$\text{Ainsi une densité de } Z \text{ est } h(t) = \begin{cases} g(t) + g(-t) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 2g(t) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2(a-t)}{a^2} & \text{si } t \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Corrigé de l'exercice 18. 1. On a

$$\ln(Z) = \ln(\min(X, Y) - \ln \max(X, Y)) \stackrel{\text{car } \ln \text{ est croissante}}{=} \min(\ln(X), \ln(Y)) - \max(\ln(X), \ln(Y)) = -|\ln(X) - \ln(Y)|.$$

$$\text{Soit } t \in \mathbb{R}. \text{ On a } F_{\ln(X)}(t) = F_X(e^t) = \begin{cases} e^t & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}. \text{ Une densité de } \ln(X) \text{ est } f_{\ln(X)}(t) = \begin{cases} e^t & \text{si } t \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$\text{Soit } t \in \mathbb{R}. \text{ On a } F_{-\ln(X)}(t) = 1 - F_{\ln(X)}(-t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \text{ Une densité de } -\ln(X) \text{ est } f_{-\ln(X)}(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi $-\ln(X) \sim \mathcal{E}(1)$.

2. Les v.a.r $\ln(X)$ et $-\ln(Y)$ sont indépendantes donc une densité de $\ln(X) - \ln(Y)$ est donnée par

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\ln(X)}(x) f_{-\ln(Y)}(t-x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\ln(X)}(x) f_{-\ln(X)}(t-x) dx \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ ont même loi} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^x 1_{]-\infty, 0]}(x) e^{-(t-x)} 1_{[0, +\infty[}(t-x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x-t} 1_{]-\infty, 0]}(x) 1_{]-\infty, t]}(x) dx \end{aligned}$$

- Si $t \leq 0$ alors $g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x-t} 1_{]-\infty, t]}(x) dx = \int_{-\infty}^t e^{2x-t} dx = \frac{e^t}{2}.$
- Si $t > 0$ alors $g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x-t} 1_{]-\infty, 0]}(x) dx = \int_{-\infty}^0 e^{2x-t} dx = \frac{e^{-t}}{2}.$

Ainsi une densité de $\ln(X) - \ln(Y)$ est $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}.$

Maintenant, déterminons une densité de Z . On a Z est à valeurs dans $]0, 1]$, donc si $t \leq 0$ alors $F_Z(t) = 0$ et si $t > 0$ alors $F_Z(t) = 1$. Soit $t \in]0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(-\ln(Z) \geq -\ln t) \\ &= \mathbb{P}(|\ln(X) - \ln(Y)| \geq -\ln t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(|\ln(X) - \ln(Y)| \leq -\ln t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\ln t \leq \ln(X) - \ln(Y) \leq -\ln t) \\ &= 1 - \int_{\ln t}^{-\ln t} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(\int_{\ln t}^0 e^x dx + \int_0^{-\ln t} e^{-x} dx \right) = t. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi une densité de } Z \text{ est } f_Z(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \text{ D'où } Z \sim \mathcal{U}([0, 1]).$$

Corrigé de l'exercice 19. 1. f est positive sur $\mathbb{R}$ et l'ensemble des points de discontinuité de f est fini (ici vide). De plus

$$\int_0^A f(t) dt = \int_0^A \exp(-t - e^{-t}) dt = \left[e^{-e^{-t}} \right]_0^A \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1 - e^{-1} \quad \text{et} \quad \int_A^0 f(t) dt \xrightarrow{A \rightarrow -\infty} e^{-1}.$$

Par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut 1. Donc f est bien une densité de probabilité.

2. a. Notons F la fonction de répartition de Y . On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_{-Y}(t) = 1 - F(-t)$ donc par dérivation, $f_{-Y}(t) = f(-t) = \exp(t - e^t).$

b. Les v.a.r X et $-Y$ sont indépendantes donc $X - Y$ est à densité de densité est donnée par

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f_{-Y}(t-x)dx \\ &= e^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} \exp(-e^{-x}(1+e^t))dx \\ &= \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \underbrace{\int_0^{+\infty} s e^{-s} ds}_{=\Gamma(2)=2!=1} \quad \text{changement de variable } s = e^{-x}(1+e^t). \\ &= \frac{e^t}{(1+e^t)^2}. \end{aligned}$$

2 Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites

Corrigé de l'exercice 20. 1. Comme $X_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ on a $\sqrt{n} \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$F_{X_n}(t) = \mathbb{P}(X_n \leq t) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n} \frac{X-m}{\sigma} \leq \sqrt{n} \frac{t-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{n}(t-m)/\sigma} e^{-x^2/2} dx.$$

2. Si $t < m$ alors $\sqrt{n} \frac{t-m}{\sigma} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ et $F_{X_n}(t) = \mathbb{P}(X_n \leq t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Si $t > m$ alors $\sqrt{n} \frac{t-m}{\sigma} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $F_{X_n}(t) = \mathbb{P}(X_n \leq t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Ainsi

$$F_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } t > m \\ 0 & \text{si } t < m \end{cases} = F_X(t)$$

où X est la variable aléatoire constante égale à m . De plus F_X n'est pas continue en $t = m$ d'où $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$.

Corrigé de l'exercice 21. 1. On a $1 - \Phi(t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X > t)$. Or par symétrie de Φ i-e : $1 - \Phi(t) = \Phi(-t)$, on a $\mathbb{P}(X > t) = \mathbb{P}(X \geq t) = \mathbb{P}(X \leq -t)$ donc $1 - \Phi(t) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(|X| \geq t)$. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\forall t > 0, \mathbb{P}(|X| \geq t) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{t^2}$$

donc $1 - \Phi(t) \leq \frac{1}{2t^2}$ pour tout $t > 0$.

2. On a $t \mapsto 1 - \Phi(t)$ est cpm sur $\mathbb{R}^+$ et $0 \leq 1 - \Phi(t) \leq \frac{1}{2t^2}$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t^2}$ converge alors $\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))dt$ converge. De plus pour $A > 0$,

$$\int_0^A (1 - \Phi(t))dt = [t(1 - \Phi(t))]_0^A + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^A t e^{-t^2/2} dt = A(1 - \Phi(A)) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [-e^{-t^2/2}]_0^A.$$

Or $0 \leq A(1 - \Phi(A)) \leq \frac{1}{2A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$ et $[-e^{-t^2/2}]_0^A = 1 - e^{-A^2/2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1$. Ainsi $\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Corrigé de l'exercice 22. Chaque Y_k possède une variance donc par indépendance, S_n possède une variance et on a

$$\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(Y_k) = \frac{1}{n} \mathbb{V}(Y_1).$$

De plus $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{n} = \mathbb{E}(Y_1)$. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la v.a.r $\frac{S_n}{n}$ on obtient

$$\forall a > 0, \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)\right| \geq a\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{a^2} \leq \frac{\mathbb{V}(Y_1)}{na^2}.$$

Corrigé de l'exercice 23. Méthode de Monte-Carlo

Corrigé de l'exercice 24. La v.a.r $(X_n - \mu)^2$ est positive et admet une espérance car X_n admet un moment d'ordre 2. D'après l'inégalité de Markov, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - \mu| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}((X_n - \mu)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}((X_n - \mu)^2)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{V}(X_n) + \mathbb{E}(X_n)^2 - 2\mu\mathbb{E}(X_n) + \mu^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{0 + \mu^2 - 2\mu^2 + \mu^2}{\varepsilon} = 0.$$

Ainsi $\mathbb{P}(|X_n - \mu| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ d'où $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \mu$.

Corrigé de l'exercice 25. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathbb{P}(Y_n \geq k) = \mathbb{P}(X_1 \geq k, \dots, X_n \geq k) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \geq k) = \mathbb{P}(X_1 \geq k)^n$. Or

$$\mathbb{P}(X_1 \geq k) = \sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = i) = \sum_{i=k}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} = (1-p)^{k-1}.$$

Donc $\mathbb{P}(Y_n \geq k) = (1-p)^{n(k-1)}$. On en déduit alors que

$$\mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{P}(Y_n \geq k) - \mathbb{P}(Y_n \geq k+1) = (1-p)^{n(k-1)}(1 - (1-p)^n).$$

Ainsi $\mathbb{P}(Y_n = k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ d'où $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ où X est une variable aléatoire certaine égale à 1.

Corrigé de l'exercice 26. Soit $\varepsilon > 0$. On a $X_n \leq \frac{nX}{n} = X$ donc

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X - X_n \geq \varepsilon) = \mathbb{P}\left(X - \frac{\lfloor nX \rfloor}{n} \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}(nX - \lfloor nX \rfloor \geq n\varepsilon).$$

La suite $(n\varepsilon)_n$ tend vers $+\infty$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, n\varepsilon > 1$. Mais on sait que $x - \lfloor x \rfloor < 1$ pour tout réel x . Donc $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$ pour $n \geq n_0$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$ et donc $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X$.

Corrigé de l'exercice 27. $\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i) = 2p$ et $S_n = \frac{X_1 + 2X_2 + \dots + 2X_n + X_{n+1}}{n}$. Or, $X_1, 2X_2, \dots, 2X_n, X_{n+1}$ sont mutuellement indépendantes, et possèdent toutes une variance donc S_n possède une variance et

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(S_n) &= \frac{\mathbb{V}(X_1) + 4\mathbb{V}(X_2) + \dots + 4\mathbb{V}(X_n) + \mathbb{V}(X_{n+1})}{n^2} \\ &= \frac{p(1-p) + 4p(1-p) + \dots + 4p(1-p) + p(1-p)}{n^2} \\ &= \frac{p(1-p)}{n^2} \left(1 + \underbrace{4 + \dots + 4}_{(n-1) \text{ termes}} + 1\right) = \frac{(4n-2)p(1-p)}{n^2}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|S_n - 2p| \geq \varepsilon) \leq \frac{(4n-2)p(1-p)}{n^2\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Ainsi $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 2p$.

Corrigé de l'exercice 28. 1. f est positive et continue sauf peut être en 0. Pour $A > 0$,

$$\int_0^A f(t)dt = \int_0^A \frac{t}{\sigma^2} e^{-t^2/2\sigma^2} dt = \left[-e^{-t^2/2\sigma^2}\right]_0^A = 1 - e^{-A^2/2\sigma^2} \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} 1 \text{ et } \int_{-\infty}^A \underbrace{f(t)}_{=0} dt = 0.$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1. Ainsi f est une densité de probabilités.

2. Si $t < 0$ alors $F_X(t) = 0$ et si $t \geq 0$, $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx = 1 - e^{-x^2/2\sigma^2}$. Ainsi $F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/2\sigma^2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. On a $F_{Y_n}(\varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(Y_n \geq \varepsilon) = 1 - (1 - F_{X_1}(\varepsilon))^n = 1 - e^{-n\varepsilon^2/2\sigma^2}$ et

$$F_{Y_n}(-\varepsilon) = \mathbb{P}(Y_n \leq -\varepsilon) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n (X_i \leq -\varepsilon)\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq -\varepsilon) = \sum_{i=1}^n \underbrace{F_{X_i}(-\varepsilon)}_{=0} = 0.$$

Donc $\mathbb{P}(|Y_n| \leq \varepsilon) = \mathbb{P}(-\varepsilon \leq Y_n \leq \varepsilon) = F_{Y_n}(\varepsilon) - F_{Y_n}(-\varepsilon) = 1 - e^{-n\varepsilon^2/2\sigma^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$. Ainsi $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0$.

Corrigé de l'exercice 29. Soit $\varepsilon > 0$. La v.a.r Y_n est à valeurs dans $[a, b]$ donc $|Y_n - a| = Y_n - a$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|Y_n - a| \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}(Y_n \geq a + \varepsilon) = 1 - F_{Y_n}(a + \varepsilon) \\ &= (1 - F_{X_1}(a + \varepsilon))^n \\ &= \begin{cases} 1 - \left(\frac{a + \varepsilon - a}{b - a}\right)^n & \text{si } a + \varepsilon \in]a, b] \\ 1 - 1 & \text{si } a + \varepsilon > b \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(\frac{b - a - \varepsilon}{b - a}\right)^n & \text{si } 0 < \varepsilon \leq b - a \\ 0 & \text{si } \varepsilon > b - a \end{cases} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

D'où $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} a$.

Corrigé de l'exercice 30. 1. Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$. On a $\mathbb{P}(Y_n \geq k) = \mathbb{P}(X_1 \geq k)^n$. Or

$$\mathbb{P}(X_1 \geq k) = \sum_{i=k}^N \mathbb{P}(X_1 = i) = \sum_{i=k}^N \frac{1}{N} = \frac{N - k + 1}{N}$$

donc $\mathbb{P}(Y_n \geq k) = \left(\frac{N - k + 1}{N}\right)^n$. Par suite $\mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{P}(Y_n \geq k) - \mathbb{P}(Y_n \geq k + 1) = \left(\frac{N - k + 1}{N}\right)^n - \left(\frac{N - k}{N}\right)^n$.

Mais $\left(\frac{N - k}{N}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et $\left(\frac{N - k + 1}{N}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Ainsi $\mathbb{P}(Y_n = k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On en déduit donc que (Y_n) converge en loi vers la variable certaine égale à 1.

2. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\mathbb{P}(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(Y_n - 1 \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(Y_n \geq 1 + \varepsilon) \leq \mathbb{P}(Y_n \geq 2) = \left(\frac{N - 1}{N}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. On en déduit donc que (Y_n) converge en probabilités vers la variable certaine égale à 1.

Corrigé de l'exercice 31. 1. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\mathbb{P}(Z_n \leq t) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > t)^n = 1 - (1 - F_{X_1}(t))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - (1 - t)^n & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

donc $F_{nZ_n}(t) = \mathbb{P}\left(Z_n \leq \frac{t}{n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 < t < n \\ 1 & \text{si } t \geq n \end{cases}$. Si $t \leq 0$ alors $F_{nZ_n}(t) = 0$. Si $t > 0$ et pour n assez grand,

$F_{nZ_n}(t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 - e^{-t}$. D'où $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $F_{nZ_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} F_Y(t)$. Ainsi $nZ_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Y$.

2. Si $t \leq 0$ alors $F_Z(t) = \mathbb{P}(e^{-X} \leq t) = 0$ et si $t > 0$ alors

$$F_Z(t) = \mathbb{P}(X \geq -\ln t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq -\ln t) = 1 - \begin{cases} 1 - e^{\ln t} & \text{si } -\ln t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} t & \text{si } t \leq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$ et par suite $Z \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

3. Les λX_i suivent tous la loi exponentielle de paramètre 1, et donc d'après la question 2, les $e^{-\lambda X_i}$ suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Comme les $e^{-\lambda X_i}$ sont indépendantes car les X_i le sont, alors d'après la question 1, $nT_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Y$.

Corrigé de l'exercice 32. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon > 1 \\ 1/n & \text{sinon} \end{cases}$. Dans tous les cas $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq$

$\varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et donc $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X$.

Soit $\varepsilon > 0$. On a $\mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(Y_n \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(Y_n \leq -\varepsilon) = \mathbb{P}(nY_n - 1 \geq n\varepsilon - 1) + \mathbb{P}(nY_n - 1 \leq -n\varepsilon - 1)$. Or

$$\begin{cases} \mathbb{P}(nY_n - 1 \geq n\varepsilon - 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{n\varepsilon-1}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{n\varepsilon-1} e^{-x^2/2} dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 - 1 = 0 \\ \mathbb{P}(nY_n - 1 \leq -n\varepsilon - 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-n\varepsilon-1} e^{-x^2/2} dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n\varepsilon-1}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

Donc $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et donc $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X$.

Corrigé de l'exercice 33. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(|X_n - c| \leq \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(X_n \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon])$. Mais

$$\mathbb{P}(X_n \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \geq \mathbb{P}(X_n \in [c - \varepsilon/2, c + \varepsilon]) = F_{X_n}(c + \varepsilon) - F_{X_n}(c - \varepsilon/2).$$

Donc $\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) \leq 1 - F_{X_n}(c + \varepsilon) + F_{X_n}(c - \varepsilon/2)$. Or $F_X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. En particulier, F_X est continue en $c + \varepsilon$ et $c - \varepsilon/2$ et donc

$$F_{X_n}(c + \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} F_X(c + \varepsilon) = 1 \text{ et } F_{X_n}(c - \varepsilon/2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} F_X(c - \varepsilon/2) = 0.$$

D'où $\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(|X_n - c| \leq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 - 1 = 0$ et $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} c$.

Corrigé de l'exercice 34. 1. Chaque X_n suit la loi exponentielle de paramètre 1 et les X_n sont indépendantes donc S_n suit la loi gamma de paramètres n et 1. Ainsi $S_n \sim \Gamma(n, 1)$. En particulier,

$$\mathbb{E}(S_n) = n\mathbb{E}(X_1) = n \text{ et } \mathbb{V}(S_n) = n\mathbb{V}(X_1) = n.$$

2. On a $\frac{1}{\sigma(X_1)\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^n X_k - n\mathbb{E}(X_1) \right) = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. Les v.a.r X_n sont indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2 donc d'après le théorème de la limite centrée :

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X \quad \text{où } X \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

En particulier, $\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P}(X \leq 0) = \frac{1}{2}$. Mais $\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = \mathbb{P}(S_n - n \leq 0) = \mathbb{P}(S_n \leq n)$ donc $\mathbb{P}(S_n \leq n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}$.

3. Une densité de S_n est donnée par $f_{S_n}(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(S_n \leq n) = \int_{-\infty}^n f_{S_n}(t) dt = \int_0^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} dt.$$

Par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{n-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 35. La v.a.r Y_n est à valeurs dans $\left\{\frac{k}{n}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$. Si $t < \frac{1}{n}$ alors $F_{Y_n}(t) = 0$. Pour $t \geq \frac{1}{n}$, soit k l'unique entier ($k = \lfloor nt \rfloor$) tel que $\frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}$. On a

$$F_{Y_n}(t) = \mathbb{P}(Y_n \leq t) = \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq \frac{k}{n}\right) = \mathbb{P}(X_n \leq k) = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{j=1}^k \frac{a}{n} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{j-1} = 1 - \left(1 - \frac{a}{n}\right)^k.$$

Ainsi, pour $t \geq \frac{1}{n}$, $F_{Y_n}(t) = 1 - \left(1 - \frac{a}{n}\right)^k = 1 - \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{\lfloor nt \rfloor} = 1 - \exp\left(\frac{\lfloor nt \rfloor}{n} \ln\left(1 - \frac{a}{n}\right)\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 - e^{-at}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Y_n}(t) =$

$\begin{cases} 1 - e^{-at} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On reconnaît là la fonction de répartition d'une v.a.r suivant la loi exponentielle de paramètre a . D'où

$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ où $X \sim \mathcal{E}(a)$.

Corrigé de l'exercice 36.

Partie I.

On veut montrer dans cette partie que la suite $(X_n + Y_n)$ converge en loi vers $X + \theta$.

1. Posons $Y'_n = Y_n - \theta$. On a $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|Y'_n - 0| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|Y_n - \theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Donc $Y'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0$. De plus

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{X_n + Y_n}(t) = \mathbb{P}(X_n + Y_n \leq t) = \mathbb{P}(X_n + Y'_n \leq t - \theta) = F_{X_n + Y'_n}(t - \theta).$$

Si $X_n + Y'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ alors, en tout point de continuité $t - \theta$ de X on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n + Y_n}(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n + Y'_n}(t - \theta) = F_X(t - \theta) = F_{X + \theta}(t).$$

Notons que $t - \theta$ est un point de continuité de F_X si, et seulement si, t est un point de continuité de $F_{X + \theta}$. Ainsi, si $X_n + Y'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ alors, $X_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X + \theta$.

2. a. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\left\{(|Y_n| > \varepsilon), (|Y_n| \leq \varepsilon)\right\}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n + Y_n \leq t) &= \mathbb{P}((X_n + Y_n \leq t) \cap (|Y_n| \leq \varepsilon)) + \mathbb{P}((X_n + Y_n \leq t) \cap (|Y_n| > \varepsilon)) \\ &\leq \mathbb{P}((X_n + Y_n \leq t) \cap (|Y_n| \leq \varepsilon)) + \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) \\ &\leq \mathbb{P}(X_n \leq t + \varepsilon) + \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon). \end{aligned}$$

- b. Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente en remplaçant t par $t - \varepsilon$.
- c. Il suffit de combiner les résultats des deux questions précédentes :

$$\mathbb{P}(X_n \leq t - \varepsilon) - \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(X_n + Y_n \leq t) \leq \mathbb{P}(X_n \leq t + \varepsilon) + \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon).$$

3. Soit $\varepsilon > 0$ et t un point de continuité de F_X . Par continuité de F_X en t on a

$$\forall \eta > 0, \begin{cases} \exists \delta > 0 \text{ tel que } |\varepsilon| < \delta \implies |F_X(t - \varepsilon) - F_X(t)| \leq \eta/3 \\ \exists \delta' > 0 \text{ tel que } |\varepsilon| < \delta' \implies |F_X(t + \varepsilon) - F_X(t)| \leq \eta/3 \end{cases}.$$

La fonction de répartition F_X est croissante donc les points de discontinuité de F_X est au plus dénombrable et on peut donc supposer que ε est tel que $t - \varepsilon$ et $t + \varepsilon$ sont des points de continuité de F_X .

Par hypothèse, $\mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) \leq \eta/3.$$

De même, $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ donc

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |F_{X_n}(t - \varepsilon) - F_X(t - \varepsilon)| \leq \eta/3 \text{ et } \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, |F_{X_n}(t + \varepsilon) - F_X(t + \varepsilon)| \leq \eta/3.$$

Ainsi, d'après ce qui précède, on obtient l'inégalité :

$$\forall \eta > 0, \exists N \in \mathbb{N} (N = \max(n_0, n_1, n_2)), \forall n \geq N, -\eta/3 - \eta/3 - \eta/3 \leq F_{X_n+Y_n}(t) - F_X(t) \leq \eta/3 + \eta/3 + \eta/3.$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n+Y_n}(t) = F_X(t)$ et par suite $X_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$.

Partie II.

On veut montrer dans cette partie que la suite $(X_n Y_n)$ converge en loi vers θX .

1. On a $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ et la fonction $t \mapsto \theta t$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\theta X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \theta X$.

Posons $Y'_n = Y_n - \theta$. D'après la première partie, $Y'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0$. Si $X_n Y'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} 0$ alors $X_n Y'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0$. On écrit

$$X_n Y_n = X_n Y'_n + \theta X_n \text{ avec } \theta X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \theta X$$

donc d'après la première partie, on a alors $X_n Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \theta X$.

2. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{(|Y_n| > 1/M), (|Y_n| \leq 1/M)\}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_n Y_n| > \varepsilon) &= \mathbb{P}((|X_n Y_n| > \varepsilon) \cap (|Y_n| \leq 1/M)) + \mathbb{P}((|X_n Y_n| > \varepsilon) \cap (|Y_n| > 1/M)) \\ &\leq \mathbb{P}((|X_n Y_n| > \varepsilon) \cap (|Y_n| \leq 1/M)) + \mathbb{P}(|Y_n| > 1/M) \\ &\leq \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon M) + \mathbb{P}(|Y_n| > 1/M). \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour $M > 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X| > \varepsilon M) &= \mathbb{P}(X < -\varepsilon M) + \mathbb{P}(X > \varepsilon M) \\ &\leq \mathbb{P}(X \leq -\varepsilon M) + 1 - \mathbb{P}(X \leq \varepsilon M) \\ &= F_X(-\varepsilon M) + 1 - F_X(\varepsilon M) \xrightarrow[M \rightarrow +\infty]{} 0 + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

donc, pour $\eta > 0$ fixé, il existe $M > 0$ tel que $\mathbb{P}(|X| > \varepsilon M) \leq \eta/3$. Dans la suite, fixons un tel $M > 0$.

Comme dans la première partie, on peut supposer que εM est un point de continuité de $F_{|X|}$.

On a $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ et la fonction $t \mapsto |t|$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $|X_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} |X|$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \implies \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon M) \leq \mathbb{P}(|X| > \varepsilon M) + \eta/3 \leq 2\eta/3.$$

Or $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0$ donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_1 \implies \mathbb{P}(|Y_n| > 1/M) \leq \eta/3$. Ainsi

$$\exists N \in \mathbb{N} (N = \max(n_0, n_1)), \forall n \geq N, \mathbb{P}(|X_n Y_n| > \varepsilon) \leq 2\eta/3 + \eta/3 = \eta.$$

Ceci étant vrai pour tout $\eta > 0$ et donc $X_n Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0$. D'où $X_n Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} 0$.