

TD N°10

Probabilités (III)

1 Variables aléatoires réelles à densité

Exercice 1 : Montrer :

- $X \sim \mathcal{U}([0, 1]) \iff a + (b - a)X \sim \mathcal{U}([a, b]).$
- $X \sim \mathcal{E}(\lambda) \iff \lambda X \sim \mathcal{E}(1).$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$

Exercice 2 : D'après ECRICOME 2015.

- Déterminer un réel a tel que la fonction f définie par : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2 \\ \frac{a}{t \ln^2 t} & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$ soit une densité.

Dans la suite, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

- Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
- La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

Exercice 3 : Soit $X \sim \mathcal{U}([-1, 1])$. Montrer que $Y = X^2$ est une variable à densité et en déterminer une densité.

Exercice 4 : Calcul des moments - loi exponentielle. Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Montrer que X admet des moments de tout ordre et les calculer.

Exercice 5 : Loi logistique. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$.

- Montrer que F est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité X . Déterminer une densité de X .
- Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes possédant F comme fonction de répartition. On pose $Z = \max(X, Y)$.
 - Montrer que Z est une variable à densité.
 - Déterminer une densité de Z .

Exercice 6 : Loi de Pareto. Soit $a > 0$ et soit $f_a(t) = \begin{cases} at^{-a-1} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}$.

- Montrer que f_a est une densité.
- Soit X une variable aléatoire admettant f_a pour densité.
 - Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
 - X possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer. Même question pour la variance.
 - On pose $Y = \ln X$. Déterminer la fonction de répartition de Y , puis reconnaître la loi de Y .

Exercice 7 : Calculs de loi d'une variable aléatoire obtenue par composition.

- Soit $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$. Déterminer la loi de $Y = \sin(\pi X)$.
- Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer la loi de $Y = X^2$.
- Soit $X \sim \mathcal{E}(1)$. Déterminer la loi de $Y = \lceil \theta X \rceil$, $\theta > 0$.

On rappelle que $\lceil x \rceil = \min \{k \in \mathbb{Z}, k \geq x\}$ est la partie entière supérieure de x .

Exercice 8 : Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. indépendantes et suivant la même loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi de $Y = \max_{1 \leq i \leq n} (X_i)$.

Exercice 9 : D'après CNC MP 2024. Soit X la variable aléatoire de densité la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{9}{4}(1+x)e^{-3x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X .
- Déterminer l'espérance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X .

Exercice 10 : Loi Gamma comme somme de lois exponentielles. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes telles que $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Montrer que $X + Y \sim \Gamma(2, \lambda)$.

Exercice 11 : Stabilité de la loi Gamma. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes telles que $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ et $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$. Montrer que $X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$.

Indication : on pourra utiliser l'égalité $\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1}ds = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ pour $\alpha, \beta > 0$.

Exercice 12 : Stabilité de la loi gaussienne. On rappelle l'intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

1. Soit $a > 0$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(at^2 + 2bt + c))dt$ converge et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(at^2 + 2bt + c))dt = e^{-d} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{avec } d = c - \frac{b^2}{a}.$$

2. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes telles que $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Montrer que $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Exercice 13 : Loi de Cauchy. Une v.a.r. X suit la loi de Cauchy de paramètre $a > 0$ si sa densité est donnée par $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_X(t) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{t^2 + a^2}$ et on écrit $X \sim \mathcal{C}(a)$.

1. Donner la fonction de répartition de X .

2. Soit $\lambda > 0$. Reconnaître la loi de λX lorsque $X \sim \mathcal{C}(a)$.

Exercice 14 : Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $a \in \mathbb{R}$. Calculer l'espérance de $Y = \exp(aX)$.

Exercice 15 : Calcul des moments - loi gaussienne.

Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Montrer que X admet des moments de tout ordre et que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X^k) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k}{2i} \mu^{k-2i} \frac{\sigma^{2i} (2i)!}{2^i i!}$.

Exercice 16 : Minimum de deux lois exponentielles. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes telles que $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$. Déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 17 : Différence de deux lois uniformes : la loi de Xenakis (d'après EDHEC 2010). Soit $a > 0$. On considère deux v.a.r. X et Y , définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, a]$. On pose alors $Z = |X - Y|$.

1. a. Déterminer une densité de $-Y$.

b. En déduire que la v.a.r. $X - Y$ admet pour densité la fonction g définie par $g(t) = \begin{cases} \frac{a - |t|}{a^2} & \text{si } t \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On note G la fonction de répartition de $X - Y$.

2. a. Exprimer la fonction de répartition H de la v.a.r. Z en fonction de G .

b. En déduire qu'une densité de Z est la fonction h définie par $h(t) = \begin{cases} \frac{2(a-t)}{a^2} & \text{si } t \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 18 : Soient X, Y deux v.a.r. indépendantes suivant une loi uniforme sur $]0, 1[$. On pose $Z = \frac{\min(X, Y)}{\max(X, Y)}$.

1. Justifier que $\ln(Z) = -|\ln(X) - \ln(Y)|$. Donner une densité de $\ln(X)$ puis reconnaître la loi de $-\ln(X)$.

2. Déterminer une densité de $\ln(X) - \ln(Y)$. En déduire que $Z \sim \mathcal{U}(]0, 1])$.

Exercice 19 : Loi de Gompertz. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \exp(-t - e^{-t})$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes ayant toutes deux f pour densité.

a. Déterminer une densité de $-Y$.

b. Montrer que $Z = X - Y$ possède une densité, et la déterminer.

2 Inégalités, notions de convergence et théorèmes limites

Exercice 20 : Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. telles que $X_n \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de X_n .
2. Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 21 : On note Φ la fonction de répartition d'une v.a.r. suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Montrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 1 - \Phi(x) \leq \frac{1}{2x^2}$.
2. En déduire que $\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))dt$ converge et calculer sa valeur à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 22 : Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre

2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. Montrer que $\forall a > 0, \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{V}(Y_1)}{na^2}$.

Exercice 23 : Méthode de Monte-Carlo. Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$, et soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(U_k)$. En utilisant la loi faible des

grands nombres, montrer que $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \int_0^1 f(t)dt$.

Exercice 24 : Soit (X_n) une suite de v.a.r. à valeurs positives, ayant toutes une espérance et une variance. On suppose $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mu$ et $\mathbb{V}(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \mu$.

Exercice 25 : Soit (X_n) une suite v.a.r. indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose alors $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. Étudier la convergence en loi de $(Y_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 26 : Discrétisées d'une variable aléatoire. Soit X une v.a.r. Pour $n \geq 1$, on pose $X_n = \frac{\lfloor nX \rfloor}{n}$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X$.

Exercice 27 : Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p . On note $Y_n = X_n + X_{n+1}$, et on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$. Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilités vers la variable certaine égale à $2p$.

Exercice 28 : Minimum de lois de Rayleigh. Soit $\sigma > 0$. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sigma^2} e^{-t^2/2\sigma^2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilités.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f . Déterminer la fonction de répartition de X .
3. Soient $(X_i)_{i \geq 1}$ des v.a.r. indépendantes, de densité f . On pose alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|Y_n| \leq \varepsilon) = 1$. Qu'en déduire sur la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$?

Exercice 29 : Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes suivant toutes une loi uniforme sur $[a, b]$. On note $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilités vers la variable aléatoire certaine égale à a .

Exercice 30 : Minimum de lois discrètes. Soit $N \geq 2$, et soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$. On pose alors $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

1. Montrer que la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable que l'on précisera.
2. Montrer qu'il s'agit également d'une convergence en probabilités.

Exercice 31 : D'après Oral ESCP 2002. Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables i.i.d. suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$, et soit Y une v.a.r. suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

1. On pose $Z_n = \min(U_1, \dots, U_n)$. Montrer que la suite $(nZ_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers Y .
2. Soit X une v.a.r. suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Déterminer la loi de $Z = e^{-X}$.
3. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a.r. indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la limite en loi de la suite (nT_n) , où $T_n = \min(e^{-\lambda X_1}, \dots, e^{-\lambda X_n})$.

Exercice 32 : Soit X une v.a.r. et $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r. telles que $Y_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$. On pose $X_n = X + Y_n$.

Montrer que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X$. Même question si $Y_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 33 : Une réciproque partielle. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r qui converge en loi vers une v.a.r. constante égale à c . Démontrer que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge aussi en probabilité vers c .

Exercice 34 : D'après EDHEC 2007. On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de v.a.r. mutuellement indépendantes, et qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Rappeler quelle est la loi suivie par S_n . Donner l'espérance et la variance de S_n .

2. À l'aide du théorème de la limite centrée, établir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n \leq n) = \frac{1}{2}$.

3. En déduire un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $\int_0^n t^{n-1} e^{-t} dt$.

Exercice 35 : QSP ESCP 2009. Soit $a > 0$. Pour tout entier $n > a$, on considère X_n une v.a.r. suivant la loi géométrique de paramètre $\frac{a}{n}$. Étudier la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ définie par $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

Exercice 36 : Théorème de Slutsky (Oral ESCP 2014). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ deux suites de v.a.r. On suppose que (X_n) converge en loi vers une v.a.r. X et que (Y_n) converge en probabilités vers une constante θ .

Partie I. On veut montrer dans cette partie que la suite $(X_n + Y_n)$ converge en loi vers $X + \theta$.

1. Montrer que l'on peut supposer que $\theta = 0$.

On suppose donc désormais que (Y_n) converge en probabilités vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$ et x un point de continuité de la fonction de répartition de X .

2. a. En utilisant le système complet d'événements $\left\{(|Y_n| > \varepsilon), (|Y_n| \leq \varepsilon)\right\}$, montrer que

$$\mathbb{P}(X_n + Y_n \leq x) \leq \mathbb{P}(X_n \leq x + \varepsilon) + \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon).$$

b. Montrer de même que $\mathbb{P}(X_n \leq x - \varepsilon) \leq \mathbb{P}(X_n + Y_n \leq x) + \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon)$.

c. En déduire que $\mathbb{P}(X_n \leq x - \varepsilon) - \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(X_n + Y_n \leq x) \leq \mathbb{P}(X_n \leq x + \varepsilon) + \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon)$.

3. Montrer que $(X_n + Y_n)$ converge en loi vers X .

Partie II. On veut montrer dans cette partie que la suite $(X_n Y_n)$ converge en loi vers θX .

1. Montrer que l'on peut supposer que $\theta = 0$. **Indication :** On pourra utiliser le résultat de la partie I, ainsi que le fait que la convergence en loi vers 0 est équivalente à la convergence en probabilités vers 0.

On suppose donc désormais que (Y_n) converge en probabilités vers 0.

2. Soit M un réel > 0 et $\varepsilon > 0$. En utilisant le système complet d'événements $\left\{(|Y_n| > 1/M), (|Y_n| \leq 1/M)\right\}$, montrer que

$$\mathbb{P}(|X_n Y_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon M) + \mathbb{P}(|Y_n| > 1/M).$$

3. En utilisant le fait que (Y_n) converge en probabilités vers 0, montrer que $(X_n Y_n)$ converge en probabilités vers 0, et donc converge en loi vers 0.