TD N°6

Suites et séries de fonctions (correction)

1 Suites de fonctions

Corrigé de l'exercice 1. **1.** On a : $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < \pi/2 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$ donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

La convergence n'est pas uniforme sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ puisque la limite simple f n'est pas continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Si $x = 0$, $f_n(x) = 0$ et si $x > 0$, $f_n(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (croissance comparée) donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} 0$ sur $[0, +\infty[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $f'(x) = x\,\mathrm{e}^{-nx}(2 - nx)$.

x	0		$\frac{2}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n\left(\frac{2}{n}\right)$	$\searrow$	0

Donc

$$\|f_n - 0\|_{\infty,[0,+\infty[} = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2}\,\mathrm{e}^{-2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} 0$ sur $[0, +\infty[$.

3. Si $x = 0$ ou $x = 1$, $f_n(x) = 0$. Si $x \in]0, 1[$, $f_n(x) = nx^n(1 - x^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (croissance comparée) donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} 0$ sur $[0, 1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et $f'(x) = n^2 x^{n-1}\left(1 - \dfrac{n+2}{n}x^2\right)$.

x	0		$\sqrt{\frac{n}{n+2}}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n\left(\sqrt{\frac{n}{n+2}}\right)$	$\searrow$	0

Donc

$$\|f_n - 0\|_{\infty,[0,1]} = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\sqrt{\tfrac{n}{n+2}}\right) = \frac{2n}{n+2}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n/2} = \frac{2n}{n+2}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-n/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\,\mathrm{e}^{-1} \neq 0.$$

Ainsi, $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

4. Si $x = 0$ ou $x = 1$, $f_n(x) = 0$. Si $x \in]0, 1[$, $f_n(x) = x^n(1 - x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (suite géométrique) donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} 0$ sur $[0, 1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et $f'(x) = x^{n-1}\big(n - (n+1)x\big)$.

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$	$\searrow$	0

Donc

$$\|f_n - 0\|_{\infty,[0,1]} = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\tfrac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}\frac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} 0$ sur $[0, 1]$.

5. Si $x=0$, $f_n(x)=0$. Si $x>0$, il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n\geq n_0$, $\dfrac{1}{n}\leq x$ donc $f_n(x)=\dfrac{1}{x}$ pour $n\geq n_0$ et par suite, $f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{x}$. Ainsi, $f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x>0\end{cases}$. D'où $f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$ sur $[0,+\infty[$.

Soit $x\in[0,+\infty[$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On a : $f_n(x)-f(x)=\begin{cases}\dfrac{n^2x^2-1}{x} & \text{si } 0<x<\dfrac{1}{n}\\ 0 & \text{si } x\geq\dfrac{1}{n}\end{cases}$. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to0^+}\big(f_n(x)-f(x)\big)=+\infty$ et donc la fonction f_n-f n'est pas bornée sur $[0,+\infty[$. D'où la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,+\infty[$.

6. Soit $x\in[0,+\infty[$. On a $f_n(x)=\left(x+\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^2\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)=x^2$ donc $f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$ sur $[0,+\infty[$.

Soit $x\in[0,+\infty[$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On a $|f_n(x)-f(x)|=\dfrac{2x\,\mathrm{e}^{-x}}{n}+\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{n^2}$.
L'étude de la fonction $x\longmapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$ sur $[0,+\infty[$ montre que $0\leq x\,\mathrm{e}^{-x}\leq\mathrm{e}^{-1}$ pour tout $x\geq0$. Ainsi,

$$\forall x\geq0,\quad |f_n(x)-f(x)|\leq\frac{2\,\mathrm{e}^{-1}}{n}+\frac{1}{n^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

i.e. $\|f_n-f\|_{\infty,[0,+\infty[}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. D'où $f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ sur $[0,+\infty[$.

7. Soit $x\geq0$. On a $f_n(x)=\exp\big((1+1/n)\ln(1+x)\big)\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)=\dfrac{1}{(1+x)}$ donc $f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$ sur $[0,+\infty[$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $g_n=f_n-f$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $g_n'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^{2+1/n}}\left((1+x)^{1/n}-1-\dfrac{1}{n}\right)$.

x	0		$(1+1/n)^n-1$		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
g_n	0	$\nearrow$	$g_n\left((1+1/n)^n-1\right)$	$\searrow$	0

$\|f_n-f\|_{\infty,[0,+\infty[}=\sup\limits_{x\in[0,+\infty[}|f_n(x)-f(x)|=g_n\left((1+1/n)^n-1\right)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\dfrac{1}{n+1}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$

D'où $f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ sur $[0,+\infty[$.

Corrigé de l'exercice 2. **1.** Soit $x\in[0,+\infty[$. On a $f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)=\begin{cases}(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

donc $f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$ sur $[0,+\infty[$.

2. La fonction f_n est continue sur $[0,+\infty[$ mais la limite simple f n'est pas continue sur $[0,+\infty[$ donc la convergence ne peut pas être uniforme sur $[0,+\infty[$.

3. Soit $[a,b]$ un segment $\subset[0,+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[a,b],\quad |f_n(x)-f(x)| &= \left|\frac{n(x^3+x)\,\mathrm{e}^{-x}}{nx+1}-(1+x^2)\,\mathrm{e}^{-x}\right|\\ &= \frac{(1+x^2)\,\mathrm{e}^{-x}}{nx+1}\\ &\leq \frac{1+b^2}{na+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\end{aligned}$$

i.e. $\|f_n-f\|_{\infty,[a,b]}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. D'où $f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ sur tout segment $[a,b]\subset\,]0,+\infty[$.

Corrigé de l'exercice 3. *Convergence simple sur* $[0,+\infty[$:
Si $x=0$, $f_n(x)=0$. Si $x>0$, il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n\geq n_0$, $\dfrac{1}{n}\leq x$ donc $f_n(x)=0$ pour $n\geq n_0$ et par suite, $f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Ainsi, $f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ pour tout $x\in[0,+\infty[$. D'où $f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} 0$ sur $[0,+\infty[$.
Convergence uniforme sur $[0,+\infty[$:
On a : $\|f_n-0\|_{\infty,[0,+\infty[}=\sup\limits_{x\in[0,+\infty[}|f_n(x)|=n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ donc la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0,+\infty[$.

Convergence uniforme sur $[a,+\infty[$ *avec* $a>0$:
Soit $a>0$ et $x\in[a,+\infty[$. Il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n\geq n_0$, $\dfrac{1}{n}\leq a$ donc $f_n(x)=0$ pour $n\geq n_0$ donc

$$\exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\geq n_0,\ \ \|f_n-0\|_{\infty,[a,+\infty[}=0.$$

i.e. $f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}}0$ sur $[a,+\infty[$.

Corrigé de l'exercice 4. **1.** Supposons $f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}}f$ sur X, donc $\|f_n-f\|_{\infty,X}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Or

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ |f_n(x_n)-f(x_n)|\leq\|f_n-f\|_{\infty,X}$$

donc $f_n(x_n)-f(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ ce qui est absurde. Ainsi, $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur X.

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.

a. Si $x=0$, $f_n(x)=0$ et si $x\in\mathbb{R}^*$,

$$|f_n(x)|\leq\frac{1}{1+n^2x^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

donc $f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Ainsi, $f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}}0$ sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $a>0$ et $x\in[a,+\infty[$. On a :

$$|f_n(x)|\leq\frac{1}{1+n^2x^2}\leq\frac{1}{1+n^2a^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

donc $\|f_n-0\|_{\infty,[a,+\infty[}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ i.e. $f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}}0$ sur $[a,+\infty[$.

Par contre, la convergence n'est pas uniforme sur $]0,+\infty[$ car $f_n\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)=\dfrac{1}{1+\pi^2/4}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{1+\pi^2/4}\neq0$.

Corrigé de l'exercice 5. **1.** Si $t=0$, $f_n(t)=1$ et si $t\in]0,1]$, $f_n(t)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{n^2t^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $f_n(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ pour tout $t\in]0,1]$. Ainsi, $f_n(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(t)=\begin{cases}1 & \text{si}\quad t=0\\ 0 & \text{si}\quad t\in]0,1]\end{cases}$. Par suite, $f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}}f$ sur $[0,1]$.

2. Soit $a\in]0,1[$ et $t\in[a,1]$. On a :

$$|f_n(t)-f(t)|=|f_n(t)-0|\leq\frac{\mathrm{e}^{-a}}{1+n^2a^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

i.e. $\|f_n-f(t)\|_{\infty,[a,1]}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}}f$ sur $[a,1]$.

3. La fonction f_n est continue sur $[0,1]$ mais la limite simple f n'est pas continue sur $[0,1]$ donc la convergence ne peut pas être uniforme sur $[0,1]$.

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}u_n&\underbrace{=}_{nt=s}\frac{1}{n}\int_0^n\frac{\mathrm{e}^{-s/n}}{1+s^2}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{n}\left(\left[\mathrm{e}^{-s/n}\arctan s\right]_0^n+\frac{1}{n}\int_0^n\mathrm{e}^{-s/n}\arctan s\,\mathrm{d}s\right)\\&=\frac{\mathrm{e}^{-1}\arctan n}{n}+\frac{1}{n^2}\int_0^n\mathrm{e}^{-s/n}\arctan s\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

donc $0\leq u_n-\dfrac{\mathrm{e}^{-1}\arctan n}{n}\leq\dfrac{\pi}{2n^2}\displaystyle\int_0^n\mathrm{e}^{-s/n}\,\mathrm{d}s=\dfrac{\pi}{2n}(1-\mathrm{e}^{-1})\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-1}\arctan n}{n}=0$.

Corrigé de l'exercice 6. **1.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $t\in\mathbb{R}^*$, on a :

$$f_n(t)=\prod_{k=1}^n\frac{\sin\left(\dfrac{t}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2^k}\right)}=\frac{\sin t}{2^n\sin\left(\dfrac{t}{2^n}\right)}$$

i.e. $\sin\left(\dfrac{t}{2^n}\right)f_n(t)=\dfrac{\sin t}{2^n}$ et l'égalité est triviale si $t=0$. Ainsi, $\forall t\in\mathbb{R}$, $\sin\left(\dfrac{t}{2^n}\right)f_n(t)=\dfrac{\sin t}{2^n}$.

Convergence simple de $(f_n)_{n\geq1}$: Si $t=0$, $f_n(t)=1$ et si $t\in\mathbb{R}^*$,

$$f_n(t) = \frac{\sin t}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sin t}{t}.$$

Ainsi, $f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$ donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$ sur $\mathbb{R}$.

2. On a :

$$f_n\left(\frac{\pi}{2}+2^n\pi\right) - f\left(\frac{\pi}{2}+2^n\pi\right) = -\underbrace{\frac{1}{2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 2/\pi} - \underbrace{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2^n\pi}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{-2}{\pi} \neq 0.$$

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 7. **1.** Si $x = 0$, $f_n(x) = 0$ et si $x > 0$, $f_n(x) = x\big(1 + n^\alpha \mathrm{e}^{-nx}\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ (croissance comparée) donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) = x$ pour tout $x \in [0, +\infty[$. Ainsi, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$ sur $[0, +\infty[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n = f_n - f$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $g_n'(x) = n^\alpha\big(1 - nx\big)\mathrm{e}^{-nx}$.

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
g_n	0	$\nearrow$	$g_n\left(\frac{1}{n}\right)$	$\searrow$	0

$$\|f_n - f\|_{\infty,[0,+\infty[} = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n^{1-\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ si, et seulement si, } \alpha < 1.$$

Donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ sur $[0, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha < 1$.

3. Ici $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ sur $[0, +\infty[$. Par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x\big(1 + \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx}\big)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Corrigé de l'exercice 8. *Convergence simple sur* $[1, +\infty[$: Si $x = 1$, $f_n(x) = 0$ et si $x > 1$,

$$f_n(x) = n\big(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{n}} - 1\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{\ln x}{n} = \ln x.$$

Donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) = \ln x$ pour tout $x \in [1, +\infty[$ et par suite, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$ sur $[1, +\infty[$.

Convergence uniforme sur $[1, +\infty[$: On a

$$f_n(\mathrm{e}^n) - f(\mathrm{e}^n) = n(\mathrm{e} - 2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

donc la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur $[1, +\infty[$.

Convergence uniforme sur $[1, a]$ *avec* $a > 1$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n = f_n - f$ est dérivable sur $[1, a]$ et $g_n'(x) = \frac{1}{x}\big(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{n}} - 1\big)$.

x	1		a
$g_n'(x)$		$+$	
g_n	0	$\nearrow$	$g_n(a)$

$$\|f_n - f\|_{\infty,[1,a]} = \sup_{x\in[1,a]} |f_n(x) - f(x)| = g_n(a) = f_n(a) - f(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ i.e. } f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \text{ sur } [1, a].$$

Corrigé de l'exercice 9. On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-nx^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est paire. On limite donc l'étude de la convergence à $\mathbb{R}^+$.

- Convergence simple : Si $x = 0$, $f_n(x) = 1$ et si $x > 0$, $f_n(x) = \cos\left(x\,\mathrm{e}^{-nx^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos 0 = 1$ donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) = 1$ sur $\mathbb{R}^+$ i.e. $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$ sur $\mathbb{R}$.
- Convergence uniforme : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $u_n'(x) = \left(1 - 2nx^2\right)\mathrm{e}^{-nx^2}$.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2n}}$		$+\infty$
$u_n'(x)$		$+$	0	$-$	
u_n	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2n}}\mathrm{e}^{-1/2}$	$\searrow$	0

Pour n assez grand, les valeurs de u_n se situent donc dans l'intervalle $[0, \pi/2]$ sur lequel la fonction cosinus est strictement décroissante. On en déduit que, pour n assez grand :

$$\|f_n - f\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = \|f_n - 1\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x) - 1| = \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\left(1 - f_n(x)\right) = 1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\,\mathrm{e}^{-1/2}\right).$$

Donc $\|f_n - f\|_{\infty,\mathbb{R}^+} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ i.e. $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ sur $\mathbb{R}$. (f est la fonction constante sur $\mathbb{R}$ égale à 1)

La suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction constante f égale à 1. De plus, les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$. Par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 1\mathrm{d}x = 1.$$

Corrigé de l'exercice 10. **1.** Soit $x > 0$. On a $f_n(x) = \dfrac{nx^2\,\mathrm{e}^{-nx}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (croissance comparée) donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On a $f_n(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{nx^2}{x^2} = n$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f_n(x) = n$ et $\sup\limits_{x>0}|f_n(x)| \geq n$. Par suite, la convergence de la suite $(f_n)_n$ ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. La fonction g est continue sur $[a,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ donc g est bornée sur $[a,+\infty[$. Par ailleurs, $g_n(x) = g(x)n\,\mathrm{e}^{-(n+1)x}$. Soit M un majorant de $|g|$ sur $[a,+\infty[$. On a :

$$\forall x \geq a,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ |f_n(x)| \leq Mn\,\mathrm{e}^{-(n+1)a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ i.e. $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} 0$ sur $[a,+\infty[$.

Corrigé de l'exercice 11. **1.** Soit $\varepsilon > 0$. g est uniformément continue sur F, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (y,y') \in F^2,\ \ \|y - y'\|_F \leq \eta \implies \|g(y) - g(y')\|_G \leq \varepsilon.$$

Comme $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in X$, $\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \eta$. Ainsi,

$$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in X,\ \ \|\left(g\circ f_n\right)(x) - \left(g\circ f\right)(x)\|_G \leq \varepsilon.$$

i.e. $g\circ f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} g\circ f$ sur X.

2. Considérons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + \dfrac{1}{n}$ et $g(x) = x^2$. La fonction g n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ sur $\mathbb{R}$ où $f(x) = x$. Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ \left|\left(g\circ f_n\right)(x) - \left(g\circ f\right)(x)\right| = \left|\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - x^2\right| = \left|\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}\right|.$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\left(g\circ f_n\right)(n) - \left(g\circ f\right)(n)\right| = 2 + \dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2 \neq 0$ i.e. $\left(g\circ f_n\right)_n$ ne converge pas uniformément vers $g\circ f$.

Corrigé de l'exercice 12. **1.** Soit $x \in K$ et $(x_k)_{k\geq1}$ une suite d'éléments de K telle que $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x \in K$. On veut montrer que $f(x_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(x)$.

Comme la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f, pour tout $k \geq 1$, $f_n(x_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_k)$ donc par définition,

$$\forall k \geq 1,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geq N_k \implies \|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)\|_F \leq \varepsilon.$$

- Pour $\varepsilon = 1$, il existe $\varphi(1) = N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, $\|f_{\varphi(1)}(x_1) - f(x_1)\|_F \leq 1$.
- Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $\varphi(2) = \max\big(N_2, \varphi(1)+1\big) > \varphi(1)$ tel que, $\|f_{\varphi(2)}(x_2) - f(x_2)\|_F \leq \frac{1}{2}$.
- À l'étape k, on prend $\varepsilon = \frac{1}{k}$, il existe $\varphi(k) = \max\big(N_k, \varphi(k-1)+1\big) > \varphi(k)$ tel que, $\|f_{\varphi(k)}(x_k) - f(x_k)\|_F \leq \frac{1}{k}$.

Ainsi, on construit par récurrence une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\|f_{\varphi(k)}(x_k) - f(x_k)\|_F \leq \frac{1}{k} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

Par hypothèse, on a $\|f_{\varphi(k)}(x_k) - f(x)\|_F \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc par l'inégalité triangulaire,

$$\|f(x_k) - f(x)\|_F \leq \underbrace{\|f_{\varphi(k)}(x_k) - f(x_k)\|_F}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{\|f_{\varphi(k)}(x_k) - f(x)\|_F}_{\longrightarrow 0} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Par suite, $f(x_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(x)$. D'où par la caractérisation séquentielle de la continuité, la fonction f est continue en x choisi arbitrairement dans K i.e. f est continue sur K.

2. Supposons que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur K donc

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists N \geq n,\ \exists (x_n)_n \in K^{\mathbb{N}} \text{ telle que, } \|f_N(x_n) - f(x_n)\|_F \geq \varepsilon.$$

Fixons un $\varepsilon > 0$.

- Pour $n = 1$, il existe $\psi(1) = N_1 \in \mathbb{N}$ et $x_1 \in K$ tel que, $\|f_{\psi(1)}(x_1) - f(x_1)\|_F \geq \varepsilon$.
- Pour $n = 2$, il existe $\psi(2) = \max\big(N_2, \psi(1)+1\big) > \psi(1)$ tel que, $\|f_{\psi(2)}(x_2) - f(x_2)\|_F \geq \varepsilon$.
- À l'étape k, on prend $n = k$, il existe $\psi(k) = \max\big(N_k, \psi(k-1)+1\big) > \psi(k)$ tel que, $\|f_{\psi(k)}(x_k) - f(x_k)\|_F \geq \varepsilon$.

Ainsi, on construit par récurrence une application $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et une suite $(x_k)_{k\geq 1} \in K^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\|f_{\psi(k)}(x_k) - f(x_k)\|_F \geq \varepsilon \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

K étant un compact, il existe alors $(x_{\theta(k)})_{k\geq 1} \in K^{\mathbb{N}}$ une sous-suite de la suite $(x_k)_{k\geq 1}$ telle que $x_{\theta(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} x \in K$.
Posons

$$y_n = x_{\theta(n)} \quad \text{et} \quad \rho(n) = \psi(\theta(n)).$$

Par hypothèse, on a : $f_{\rho(n)}(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. Et par continuité de f, on a aussi, $f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. Il vient alors,

$$f_{\rho(n)}(y_n) - f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) - f(x) = 0$$

ce qui contredit l'inégalité $\|f_{\psi(k)}(x_k) - f(x_k)\|_F \geq \varepsilon$. D'où la convergence de la suite $(f_n)_n$ est uniforme.

Corrigé de l'exercice 13. **1.** Puisque $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ et que les f_n sont continues, f est continue.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in X,\ \|x - \ell\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - f(\ell)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \implies \|u_n - \ell\|_E \leq \eta$.
Comme $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall x \in X$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2 \implies \|f_n(x) - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Notons $N = \max(N_1, N_2)$, et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$. On a alors $\sigma(n) \geq n \geq N_1$ et $\tau(n) \geq n \geq N_2$ donc :

$$\|f_{\sigma(n)}(u_{\tau(n)}) - f(\ell)\| \leq \|f_{\sigma(n)}(u_{\tau(n)}) - f(u_{\tau(n)})\| + \|f(u_{\tau(n)}) - f(\ell)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

D'où $f_{\sigma(n)}(u_{\tau(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$.

2. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers f.

a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $f_n - f \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} 0$ et $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ d'après la question précédente, on a :

$$f_n\big(f_n(x)\big) - f\big(f_n(x)\big) = \big(f_n - f\big)\big(f_n(x)\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par ailleurs, puisque $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ et que f est continue (en particulier en $f(x)$), on a :

$$f\big(f_n(x)\big)-f\big(f(x)\big)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

On déduit que

$$\Big|\big(f_n\circ f_n\big)(x)-\big(f\circ f\big)(x)\Big|\le\Big|f_n\big(f_n(x)\big)-f\big(f_n(x)\big)\Big|+\Big|f\big(f_n(x)\big)-f\big(f(x)\big)\Big|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

i.e. $\big(f_n\circ f_n\big)(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\big(f\circ f\big)(x)$. D'où $f_n\circ f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}}f\circ f$.

b. Soit $\varepsilon>0$. Puisque f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il existe $\eta>0$ tel que $\eta\le\varepsilon$ et :

$$\forall(y,y')\in\mathbb{R}^2,\ |y-y'|\le\eta\implies|f(y)-(y')|\le\varepsilon.$$

Comme $f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}}f$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n\ge N,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \ \|f_n(x)-f(x)\|\le\eta$. Donc

$$\forall n\ge N,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \ \Big|f\big(f_n(x)\big)-f\big(f(x)\big)\Big|\le\varepsilon.$$

Par ailleurs, $\forall n\ge N,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \ \Big|f_n\big(f_n(x)\big)-f\big(f_n(x)\big)\Big|\le\eta\le\varepsilon$. Donc

$$\forall n\ge N,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \ \Big|\big(f_n\circ f_n\big)(x)-\big(f\circ f\big)(x)\Big|\le\Big|f_n\big(f_n(x)\big)-f\big(f_n(x)\big)\Big|+\Big|f\big(f_n(x)\big)-f\big(f(x)\big)\Big|\le\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

D'où $f_n\circ f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}}f\circ f$.

3. On suit l'indication donnée, on a

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in\mathbb{R},\ \ \Big|\big(f_n\circ f_n\big)(x)-\big(f\circ f\big)(x)\Big|=\frac{2x^2}{n^2}+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}$$

et, en particulier, $\big(f_n\circ f_n-f\circ f\big)(n)=2+\dfrac{1}{n^4}+\dfrac{1}{n^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}2\ne0$. D'où la suite $\big(f_n\circ f_n\big)_n$ ne converge pas uniformément vers $f\circ f$.

2 Approximations uniformes

Corrigé de l'exercice 14. L'inégalité de Taylor-Lagrange permet d'écrire :

$$\forall(a,x)\in[0,\pi],\ \ |\sin x-\sin a|\le|x-a|.$$

On fixe alors un entier $n\in\mathbb{N}^*$ et on choisit une subdivision $(a_j)_{0\le j\le p}$ de $[0,\pi]$ de pas inférieur ou égal à $\dfrac{1}{n}$. (il suffit de choisir une subdivisio régulière de $[0,\pi]$ de pas égal à $\dfrac{\pi}{p}\le\dfrac{1}{n}$ i.e. $p=\lfloor n\pi\rfloor+1$)
Ensuite, soit la fonction f_n définie sur $[0,\pi]$ par :

$$f_n(x)=\begin{cases}\sin a_j & \text{si}\quad x\in[a_j,a_{j+1}[\\ \sin a_p & \text{si}\quad x=a_p=\pi.\end{cases}$$

On a alors, par l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout $x\in[0,\pi]$, $|f_n(x)-f(x)|\le\dfrac{1}{n}$. Ainsi, $f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}}f$.

Corrigé de l'exercice 15. Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}a_kX^k\in\mathbb{C}[X]$. On a :

$$\int_a^b P(t)f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b\sum_{k=0}^{p}a_kt^kf(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{p}a_k\underbrace{\int_a^b t^kf(t)\mathrm{d}t}_{=0}=0.$$

Soit $\varepsilon>0$ et $f\in\mathcal{C}^0\big([a,b],\mathbb{C}\big)$. Par le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe $\varphi:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction polynomiale telle que $\|f-\varphi\|_{\infty,[a,b]}\le\dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t &=\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t-\int_a^b\varphi(t)f(t)\mathrm{d}t\\ &=\int_a^b f(t)\big(f(t)-\varphi(t)\big)\mathrm{d}t\\ &\le\|f\|_{\infty,[a,b]}\|f-\varphi\|_{\infty,[a,b]}\int_a^b\mathrm{d}t\\ &\le\varepsilon\|f\|_{\infty,[a,b]}\end{aligned}$$

i.e. $\displaystyle\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \le \varepsilon\|f\|_{\infty,[a,b]}$ pour tout $\varepsilon>0$ et par suite, $\displaystyle\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t=0$. Or la fonction $t\longmapsto f^2(t)$ est continue et positive sur $[a,b]$ donc f est la fonction nulle sur $[a,b]$.

Notons, $P_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle P_n=\prod_{k=0}^{n-1}(X+k)$. On a $\deg P_n=n$ donc la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$. On peut écrire alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$t^n=\sum_{k=0}^{p}a_{k,n}P_k(t) \text{ avec } a_{k,n}\in\mathbb{C}.$$

On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b t^nf(t)\mathrm{d}t=\int_a^b\sum_{k=0}^{p}a_{k,n}P_k(t)f(t)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{p}a_{k,n}\underbrace{\int_a^b P_k(t)f(t)\mathrm{d}t}_{=0}=0$. D'après la première question, f est nulle sur $[a,b]$.

Corrigé de l'exercice 16. **1.** Supposons h constante sur $[a,b]$. Il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $t\in[a,b]$, $h(t)=c$. On a

$$\begin{aligned}|J_n(h)| &= \left|\int_a^b h(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\right|\\ &=\left|c\int_a^b \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\right|\\ &=\left|\left[\frac{-2c}{2n+1}\cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\right]_a^b\right|\\ &=\left|\frac{-2c}{2n+1}\cos\left(\frac{(2n+1)b}{2}\right)+\frac{2c}{2n+1}\cos\left(\frac{(2n+1)a}{2}\right)\right|\le\frac{4|c|}{2n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $\big(J_n(h)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. Supposons h en escalier sur $[a,b]$. Il existe $(a_0,a_1,\ldots,a_p)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à h. On a

$$\begin{aligned}|J_n(h)| &= \left|\int_a^b h(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\right|\\ &=\left|\sum_{j=1}^{p}\int_{a_{j-1}}^{a_j}\underbrace{h_{|]a_{j-1},a_j[}(t)}_{\text{constant}=c_j}\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\right|\\ &\le\sum_{j=1}^{p}\left|\int_{a_{j-1}}^{a_j}c_j\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0 \quad \text{(d'après la première question)}\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $\big(J_n(h)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. Supposons h continue sur $[a,b]$ et soit $\varepsilon>0$. Par le théorème d'approximation par des fonctions en escalier, il existe $\varphi:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ en escalier telle que $\|h-\varphi\|_{\infty,[a,b]}\le\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. D'après la deuxième question, $\displaystyle\int_a^b\varphi(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, donc il existe $N\in\mathbb{N}$, tel que : $n\ge N\Longrightarrow\displaystyle\left|\int_a^b\varphi(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\right|\le\frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n\ge N$, on a

$$\begin{aligned}|J_n(h)| &= \left|\int_a^b h(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\right|\\ &\le\left|\int_a^b(h(t)-\varphi(t))\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\right|+\left|\int_a^b\varphi(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\right|\\ &\le\int_a^b|h(t)-\varphi(t)|\mathrm{d}t+\left|\int_a^b\varphi(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t\right|\\ &\le\|h-\varphi\|_{\infty,[a,b]}\int_a^b\mathrm{d}t+\varepsilon/2\le\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

On a montrer que : $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\ge N\Longrightarrow|J_n(h)|\le\varepsilon$. Ainsi, la suite $\big(J_n(h)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Corrigé de l'exercice 17. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'application $g : \begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ y & \longmapsto & f\left(y^{1/k}\right)\end{array}$ est continue sur $[0,1]$. Par le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients complexes, telle que $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} g$. En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = P_n(X^k)$, qui est un polynôme à coefficients complexes, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ |A_n(t) - f(t)| = \left|P_n\left(t^k\right) - g\left(t^k\right)\right| \le \|P_n - f\|_{\infty,[0,1]}.$$

Ainsi, $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ sur $[0,1]$.

Corrigé de l'exercice 18. 1. Soit $(a_j)_{0\le j\le p}$ des réels deux à deux distincts. En utilisant les polynômes de Lagrange, la fonction polynôme P_n s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad P_n(x) = \sum_{j=0}^{p} P_n(a_j) \prod_{\substack{0\le i\le p\\ i\ne j}} \left(\frac{x-a_i}{a_j-a_i}\right).$$

Donc la fonction polynôme P_n est parfaitement déterminée par ses valeurs en les a_j.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$ sur $\mathbb{R}$, on fait tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{p} f(a_j) \prod_{\substack{0\le i\le p\\ i\ne j}} \left(\frac{x-a_i}{a_j-a_i}\right).$$

La fonction f est donc une fonction polynôme de degré $\le p$.
Montrons ensuite que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in [a,b],\ |f(x) - P_n(x)| &= \left|\sum_{j=0}^{p}\left(f(a_j) - P_n(a_j)\right) \prod_{\substack{0\le i\le p\\ i\ne j}} \left(\frac{x-a_i}{a_j-a_i}\right)\right| \\ &\le \sum_{j=0}^{p}|f(a_j) - P_n(a_j)| \left|\prod_{\substack{0\le i\le p\\ i\ne j}} \left(\frac{x-a_i}{a_j-a_i}\right)\right| \\ &\le \sum_{j=0}^{p}|f(a_j) - P_n(a_j)| M_j \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Où on a noté $M_j = \sup_{x\in[a,b]} \left|\prod_{\substack{0\le i\le p\\ i\ne j}} \left(\frac{x-a_i}{a_j-a_i}\right)\right|$ qui est bien définie puisque $x \longmapsto \left|\prod_{\substack{0\le i\le p\\ i\ne j}} \left(\frac{x-a_i}{a_j-a_i}\right)\right|$ est continue sur $[a,b]$.
Ainsi, $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ sur tout segment de $\mathbb{R}$.
2. Supposons que la convergence de la suite $(P_n)_n$ vers f est uniforme sur $\mathbb{R}$. La fonction polynôme $P_n - f$ est donc bornée sur $\mathbb{R}$. C'est une fonction constante. On en conclut, qu'à partir d'un certain rang N, on a $P_n = f + a_n$, et la suite $(a_n)_{n\ge N}$ est une suite de réels qui converge vers 0.

Corrigé de l'exercice 19. 1. Soit $t \in [0,1]$. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : Pour $n = 0$, la propriété est triviale.
Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n et montrons quelle est vraie au rang $n+1$. On a :

$$\sqrt{t} - P_{n+1}(t) = \sqrt{t} - P_n(t) - \frac{1}{2}\left(t - \left(P_n(t)\right)^2\right) = \left(\sqrt{t} - P_n(t)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + P_n(t)\right)\right).$$

Comme $P_n(t) \le \sqrt{t}$, on a : $\frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + P_n(t)\right) \le \sqrt{t} \le 1$ et donc $0 \le \sqrt{t} - P_{n+1}(t)$.
Par ailleurs, comme $0 \le \sqrt{t} - P_n(t) \le \dfrac{2\sqrt{t}}{2+n\sqrt{t}}$ et que $1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + P_n(t)\right) \le 1 - \frac{1}{2}\sqrt{t}$ (car $P_n(t) \ge 0$), on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{t} - P_{n+1}(t) &\le \frac{2\sqrt{t}}{2+n\sqrt{t}}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{t}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{t}}{2+(n+1)\sqrt{t}} \frac{\left(2+(n+1)\sqrt{t}\right)(2-\sqrt{t})}{2(2+n\sqrt{t})} \\ &= \frac{2\sqrt{t}}{2+(n+1)\sqrt{t}} \frac{2(2+n\sqrt{t}) - (n+1)t}{2(2+n\sqrt{t})} \\ &\le \frac{2\sqrt{t}}{2+(n+1)\sqrt{t}}.\end{aligned}$$

Conclusion : par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ \ 0 \leq \sqrt{t} - P_n(t) \leq \dfrac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}$.

2. D'après la première question, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ \ 0 \leq \sqrt{t} - P_n(t) \leq \dfrac{2\sqrt{t}}{2+n\sqrt{t}} \leq \dfrac{2}{n}$, donc $\|P_n - f\|_{\infty,[0,1]} \leq \dfrac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi, $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ sur $[0,1]$.

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [-1,1]$. Notons $x = |t| \in [0,1]$. On a :

$$|\varphi(t) - Q_n(t)| = \left|x - \left(P_n(x)\right)^2\right| = \underbrace{\left|\sqrt{x} - P_n(x)\right|}_{\leq 2/n}\underbrace{\left|\sqrt{x} + P_n(x)\right|}_{\leq 2} \leq \frac{4}{n}$$

donc $\|Q_n - \varphi\|_{\infty,[-1,1]} \leq \dfrac{4}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, $Q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} \varphi$ sur $[-1,1]$.

3 Séries de fonctions

Corrigé de l'exercice 20. Supposons la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X, donc la suite des restes $\left(R_n\right)_n$ converge uniformément vers 0 sur X. Ainsi, $f_n = R_{n-1} - R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} 0$ sur X.

- On a $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \dfrac{n}{n+1}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{n}/\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1} \neq 0$, donc la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément ves la fonction nulle sur $[0,+\infty[$, et par suite, la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.
- La fonction f_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $f_n'(x) = nx\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}(2 - x\sqrt{n})$. Pour $a > 0$ fixé, on a $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leq a$ pour n assez grand.

x	0		$\frac{2}{\sqrt{n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$	$\searrow$	0

Donc $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = |f_n(a)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ i.e. la série $\sum f_n$ CN sur $[a,+\infty[$ donc CU sur $[a,+\infty[$.

Corrigé de l'exercice 21. **1.** Soit $x > 0$ fixé. On a $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3x^2}$ et la série $\sum \dfrac{1}{n^3x^2}$ converge donc la série $\sum f_n(x)$ converge. Par suite, la série $\sum f_n$ CS sur $]0,+\infty[$.

2. La fonction $x \longmapsto f_n(x)$ n'est pas bornée sur $]0,+\infty[$ donc la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $]0,+\infty[$.
Soit $a > 0$. On a $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = f_n(a)$ et la série $\sum f_n(a)$ converge donc la série $\sum f_n$ CN sur $[a,+\infty[$.

3. Comme la fonction $x \longmapsto f_n(x)$ n'est pas bornée sur $]0,+\infty[$, alors la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $]0,+\infty[$ et par suite, la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.
Soit $a > 0$. La série $\sum f_n$ CN sur $[a,+\infty[$ donc CU sur $[a,+\infty[$.

Corrigé de l'exercice 22. Notons, pour $x \in [0,+\infty[,\ n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right)$.

1. Soit $x \in [0,+\infty[$. La suite $\left(u_n(x)\right)_n$ est décroissante de limite nulle donc par le critère de Leibniz, la série $\sum(-1)^n u_n(x)$ converge i.e. la série $\sum f_n$ CS sur $[0,+\infty[$.

2. Si $x = 0$, $|f_n(x)| = 0$ et si $x > 0$, $|f_n(x)| = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n(1+x)}$ et la série $\sum \dfrac{x}{n(1+x)}$ diverge donc la série $\sum |f_n(x)|$ diverge. Par suite, la série $\sum f_n$ ne converge pas absolument sur $[0,+\infty[$.
Puisque la série $\sum f_n$ ne converge pas absolument sur $[0,+\infty[$, alors la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

3. Soit $x \in [0,+\infty[$. On a :

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k \ln\left(1 + \frac{x}{k(1+x)}\right)\right| \leq \ln\left(1 + \frac{x}{(n+1)(1+x)}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc la suite des restes $(R_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur $[0,+\infty[$. Ainsi, la série $\sum f_n$ CU sur $[0,+\infty[$.

Corrigé de l'exercice 23. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et, pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$f_n'(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{(x^2+n^2)^2}\big((\alpha-2)x^2+\alpha n^2\big).$$

- Si $\alpha > 2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est croissante et $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, donc f_n n'est pas bornée et la suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0,+\infty[$. Il en résulte que la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.
- Si $\alpha = 2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = 1$. La suite $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0,+\infty[$. Il en résulte que la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.
- Supposons $0 \le \alpha < 2$. On forme le tableau de variations de f_n :

x	0		$\sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0 ou $\frac{1}{n^2}$	$\nearrow$	$f_n\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right)$	$\searrow$	0

$$\|f_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = f_n\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right) = \frac{2-\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)^{\alpha/2}\frac{1}{n^{2-\alpha}}.$$

- Si $0 \le \alpha < 1$, la série $\sum \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ converge donc la série $\sum \|f_n\|_{\infty,[0,+\infty[}$ converge et par suite, la série $\sum f_n$ CN sur $[0,+\infty[$ donc CU sur $[0,+\infty[$.
- Supposons $1 \le \alpha < 2$. Soit $x \in [0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^\alpha}{x^2+k^2} \ge \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{x^\alpha}{x^2+k^2} \ge n\frac{x^\alpha}{x^2+4n^2}.$$

En particulier, $R_n(n) \ge n\frac{n^\alpha}{5n^2} \ge \frac{1}{5}$ donc $\|R_n\|_{\infty,[0,+\infty[} \ge \frac{1}{5}$. La suite des restes $(R_n)_n$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0,+\infty[$ et par suite, la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.

Finalement, la série $\sum f_n$ CU sur $[0,+\infty[$ si, et seulement si, $0 \le \alpha < 1$

Corrigé de l'exercice 24. **1.** Si $x = 0$, $u_n(x) = 0$ et si $x \in]0,1]$, $n^2 u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (croissance comparée) donc $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum f_n(x)$ converge. Par suite, la série $\sum f_n$ CS sur $[0,1]$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une étude de fonction mène à : $\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n^\alpha}$ et la série $\sum \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ puisque $\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n^\alpha} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, la série $\sum f_n$ CN sur $[0,1]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 25. **1.** Si $x \le 0$, la suite $\big(u_n(x)\big)_n$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Si $x > 0$, on a $u_n(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum u_n(x)$ converge. D'où la série $\sum u_n$ CS sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $a > 0$ et $x \in [a,+\infty[$. On a : $|u_n(x)| \le u_n(a)$ et la série $\sum u_n(a)$ converge donc la série $\sum u_n$ CN sur $[a,+\infty[$ donc CU sur $[a,+\infty[$. Par le théorème de continuité sous le signe somme, la fonction S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $0 < x \le y$, on a $u_n(y) \le u_n(x)$ donc $S(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(y) \le \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x)$ i.e. S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et la série $\sum u_n$ CU sur $[1,+\infty[$ donc par le théorème de permutation lim et somme, on obtient : $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.

4. Montrons que $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x S(x) = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose $v_n(x) = \mathrm{e}^x u_n(x)$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad v_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ 0 & \text{si} \quad n \ge 2 \end{cases}$$

De plus, $\|v_n\|_{\infty,[1,+\infty[} = v_n(1) = \mathrm{e}^{1-\sqrt{n}}$ puisque v_n est décroissante et positive sur $[1,+\infty[$. Or la série $\sum v_n(1)$ converge car $\mathrm{e}^{1-\sqrt{n}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum v_n$ CN sur $[1,+\infty[$ donc CU sur $[1,+\infty[$. Par le théorème d'interversion somme limite, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x S(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1.$$

D'où : $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}$.

Corrigé de l'exercice 26. On pose, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_n(z) = \dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{1}{n+z}$.

- Chaque f_n est définie et continue sur $\mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$.
- Soit K un compact de $\mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$ et $z \in K$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall z \in K$, $|z| \le \alpha$ donc

$$\forall z \in K,\ \forall n > \alpha,\ |f_n(z)| = \frac{1}{n!}\frac{1}{|n+z|} \le \frac{1}{n!}\frac{1}{n-|z|} \le \frac{1}{n!}\frac{1}{n-\alpha}.$$

La série $\sum \dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{n-\alpha}$ est convergente (règle de d'Alembert) par suite, la série $\sum f_n$ CN sur K donc CU sur K.

Par le théorème de continuité, l'application $z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}$ est définie et continue sur $\mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$.

Corrigé de l'exercice 27. **1.** Soit $x \in [0,+\infty[$. La suite $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}\right)_{n\ge1}$ est décroissante de limite nulle, donc par le critère de Leibniz, la série $\sum u_n(x)$ converge et la série $\sum u_n$ CS sur $[0,+\infty[$.

Soit $x \in [0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\mathrm{e}^{-kx}\right| \le \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{n} \le \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{CU}} 0$ sur $[0,+\infty[$ et la série $\sum u_n$ CU sur $[0,+\infty[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \longmapsto u_n(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et la série $\sum u_n$ CU sur $[0,+\infty[$. Par le théorème de continuité, g est continue sur $[0,+\infty[$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \longmapsto u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $u_n'(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{-nx}$.
Soit $a > 0$. On a $\|u_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} = \mathrm{e}^{-na}$ et la série $\sum \mathrm{e}^{-na}$ converge (série géométrique) donc la série $\sum u_n'$ CN sur $[a,+\infty[$ donc CU sur $[a,+\infty[$. Ainsi, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)^n = -\mathrm{e}^{-x}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

4. Soit $x > 0$. On a :

$$g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t)\mathrm{d}t = \ln 2 + \left[\ln\left(1+\mathrm{e}^{-t}\right)\right]_0^x = \ln 2 + \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) - \ln 2 = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$$

et pour $x = 0$, l'égalité est vérifiée. D'où $\forall x \in [0,+\infty[$, $g(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$.

Corrigé de l'exercice 28. **1.** *Convergence simple :* Soit $x \in]1,+\infty[$. On a :

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{nx}\left(1+\frac{(-1)^n}{nx}\right)^{-1} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{nx} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Les séries $\sum \dfrac{(-1)^n}{nx}$ et $\sum O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ convergent donc la série $\sum f_n(x)$ converge i.e. la série $\sum f_n$ CS sur $]1,+\infty[$.

Convergence absolue : Soit $x \in]1,+\infty[$. On a : $|f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{nx}$ et la série $\sum \dfrac{1}{nx}$ diverge donc la série $\sum f_n$ ne converge pas absolument sur $]1,+\infty[$.

Convergence normale : Comme la série $\sum f_n$ ne converge pas absolument sur $]1,+\infty[$ alors la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $]1,+\infty[$.

Convergence uniforme : Comme la série $\sum f_n$ ne converge pas absolument sur $]1,+\infty[$ alors la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$.

2. Soit $x \in [2,+\infty[$. On écrit

$$S(x) = 1 + \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\right)\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{nx\left(nx+(-1)^n\right)} = 1 - \frac{\ln 2}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{nx\left(nx+(-1)^n\right)}.$$

Or $\forall x \in [2,+\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $nx + (-1)^n \ge nx - 1 \ge \dfrac{nx}{2}$, donc

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{nx\big(nx+(-1)^n\big)}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(nx)^2} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}\right)\frac{1}{x^2}.$$

D'où : $S(x) \underset{x\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{\ln 2}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Corrigé de l'exercice 29. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}$ et $|u_n(x)| \leq \dfrac{\pi}{2n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}} \leq \frac{\pi}{2n^2} \text{ et la série } \sum \frac{\pi}{2n^2} \text{ converge}$$

i.e. la série $\sum u_n$ CN sur $\mathbb{R}$ donc CU sur $\mathbb{R}$. D'où par le théorème de continuité sous signe somme, la fonction S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Montrons que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. On a u_n est une fonction impaire, il suffit donc de restreindre l'étude à $\mathbb{R}_+^*$.

- Chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u_n'(x) = \dfrac{1}{n(1+n^2x^2)}$.
- $\sum u_n$ CS sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $a > 0$ et $x \in [a,+\infty[$. On a

$$\|u_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} \leq \frac{1}{n(1+n^2a^2)} \text{ et la série } \sum \frac{1}{n(1+n^2a^2)} \text{ converge}$$

  i.e. la série $\sum u_n'$ CN sur $[a,+\infty[$ donc CU sur $[a,+\infty[$.

D'où par le théorème de dérivation sous signe somme, la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par imparité, elle l'est sur $\mathbb{R}^*$.

Corrigé de l'exercice 30. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{na+1} = \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-t^a)^n \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} (-t^a)^n\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t^a)^{N+1}}{1+t^a}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{a(N+1)}}{1+t^a}\mathrm{d}t.$$

Or $\left|(-1)^N \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a(N+1)}}{1+t^a}\mathrm{d}t\right| \leq \displaystyle\int_0^1 t^{a(N+1)}\mathrm{d}t = \frac{1}{a(N+1)+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. Par suite,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{na+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}.$$

Corrigé de l'exercice 31. **1.** Soit $r \in \,]-1,1[$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{r^n \cos(nx)}{n}$. Chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ |f_n(x)| \leq \frac{|r|^n}{n} \leq |r|^n \text{ et la série } \sum |r|^n \text{ converge}$$

donc la série $\sum f_n$ CN sur $\mathbb{R}$ donc CU sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de continuité, la fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $g_n(r) = \dfrac{r^n \cos(nx)}{n}$.

- Chaque g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et $g_n'(r) = r^{n-1}\cos(nx)$.
- Pour $r \in \,]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|g_n(r)| \leq |r|^n$ et la série $\sum |r|^n$ converge donc la série $\sum f_n$ CS sur $]-1,1[$.
- Soit $b \in \,]0,1[$. On a :

$$\|g_n'\|_{\infty,[-b,b]} \leq b^{n-1} \text{ et la série } \sum b^{n-1} \text{ converge}$$

  donc la série $\sum g_n'$ CN sur $[-b,b]$ donc CU sur $[-b,b]$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et, pour tout $r \in \,]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
g'(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}\cos(nx) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}\big(\mathrm{e}^{ix}\big)^n\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{ix}}{1-r\,\mathrm{e}^{ix}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{ix}\big(1-r\,\mathrm{e}^{-ix}\big)}{\big(1-r\,\mathrm{e}^{ix}\big)\big(1-r\,\mathrm{e}^{-ix}\big)}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{ix}-r}{1-2r\cos x+r^2}\right) = \frac{\cos x - r}{1-2r\cos x+r^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $r \in]-1,1[$, $g(r) = \underbrace{g(0)}_{=0} + \displaystyle\int_0^r \frac{\cos x - t}{1 - 2t\cos x + t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\ln\left(1 - 2t\cos x + t^2\right)\right]_0^{t=r} = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - 2r\cos x + r^2\right)$.

3. Fixons $r \in]-1,1[$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - 2r\cos x + r^2\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n\cos(nx)}{n}.$$

D'après la première question, on a convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série $\sum f_n$, donc sur $[-\pi,\pi]$. On peut donc écrire

$$-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 - 2r\cos x + r^2\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^n\cos(nx)}{n}\mathrm{d}x\right).$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$. Finalement, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1 - 2r\cos x + r^2\right)\mathrm{d}x = 0$.

Corrigé de l'exercice 32. **1.** $f_n(0) = 0$ donc $\sum f_n(0)$ converge. Pour $x > 0$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{x}{\ln 2}(\mathrm{e}^{-x})^n$ et la série $\sum(\mathrm{e}^{-x})^n$ converge car $\mathrm{e}^{-x} \in]0,1[$. Donc la série $\sum f_n$ CS sur $[0,+\infty[$.

2. On étudie les variations de f_n sur $[0,+\infty[$. Pour tout $x \geq 0$, on a $f_n'(x) = \dfrac{1 - nx}{\ln n}\mathrm{e}^{-nx}$.

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n\left(\frac{1}{n}\right)$	$\searrow$	0

$\left\|f_n\right\|_{\infty,[0,+\infty[} = \left|f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)\right| = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n\ln n}$. La série $\sum \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n\ln n}$ est divergente et la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

Soit $a > 0$. Pour n assez grand, $\dfrac{1}{n} \leq a$ donc

$$\left\|f_n\right\|_{\infty,[a,+\infty[} = \left|f_n(a)\right| \text{ et la série } \sum\left|f_n(a)\right| \text{ converge,}$$

donc la série $\sum f_n$ CN sur $[a,+\infty[$.

3. Soit $x \in [0,+\infty[$. Pour $x = 0$, $R_n(0) = 0$ et pour $x > 0$, on a

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}\frac{x\,\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} \leq \frac{1}{\ln(n+1)}\underbrace{\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}}_{=\varphi(x)} \leq \frac{g(x)}{\ln(n+1)}$$

La fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$ et admet une limite finie en 0 et une limite finie en $+\infty$, donc φ est bornée sur $]0,+\infty[$. Soit alors $M = \|\varphi\|_{\infty,]0,+\infty[}$. On a donc

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ |R_n(x)| \leq \frac{M}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'où la série $\sum f_n$ CU sur $[0,+\infty[$.

4. Chaque f_n, $n \geq 2$ est continue sur $[0,+\infty[$ et la série $\sum f_n$ CU sur $[0,+\infty[$ donc la fonction f est continue sur $[0,+\infty[$.

Chaque f_n, $n \geq 2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $f_n'(x) = \dfrac{1 - nx}{\ln n}\mathrm{e}^{-nx}$. Comme $f_n'(0) = \dfrac{1}{\ln n}$, la série $\sum f_n'(0)$ diverge donc f n'est pas dérivable en 0 à droite.

Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$. On a :

$$\forall x \in [a,b],\ \forall n \geq 2,\ |f_n'(x)| \leq \frac{1 + nb}{\ln n}\mathrm{e}^{-na}$$

et la série $\sum \dfrac{1 + nb}{\ln n}\mathrm{e}^{-na}$ converge puisque $n^2\dfrac{1 + nb}{\ln n}\mathrm{e}^{-na} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (croissance comparée). Donc la série $\sum f_n'$ CN sur $[a,b]$ donc CU sur $[a,b]$. Par le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

5. Soit $k \in \mathbb{N}$. En appliquant la même méthode que pour la convergence uniforme, on peut considérer la série $\sum g_n$ avec $g_n(x) = x^k f_n(x)$. On majore alors uniformément le reste de cette série par $\dfrac{M_k}{\ln(n+1)}$ où M_k est un majorant sur $]0,+\infty[$ de $\varphi_k : x \longmapsto x^k\varphi(x)$ (il existe pour les mêmes raisons, à savoir fonction continue avec des limites aux bornes de l'intervalle). On obtient alors la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions. Et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k f_n(x) = 0$ pour tout $n \geq 2$, on peut permuter somme et limite et obtenir $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k f(x) = 0$.

Corrigé de l'exercice 33. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{n}{n^2+x^2}$.

- Chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et
$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad f_n^{(k)}(x) &= (-1)^n \left(\frac{i}{2}\left(\frac{1}{x+in} - \frac{1}{x-in}\right)\right)^{(k)} \\ &= (-1)^n \frac{i}{2}\left(\frac{(-1)^k k!}{(x+in)^{k+1}} - \frac{(-1)^k k!}{(x-in)^{k+1}}\right) \\ &= \frac{i}{2}(-1)^{n+k} k! \left(\frac{1}{(x+in)^{k+1}} - \frac{1}{(x-in)^{k+1}}\right).\end{aligned}$$
- Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \longmapsto \dfrac{t}{t^2+x^2}$ est décroissante sur $[|x|, +\infty[$ donc la suite $\left(\dfrac{n}{n^2+x^2}\right)_{n \geq |x|}$ est décroissante de limite nulle. Par le critère de Leibniz, la série $\sum f_n(x)$ converge. Ainsi, la série $\sum f_n$ CS sur $\mathbb{R}$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a : $|f_n^{(k)}(x)| \leq \dfrac{k!}{n^{k+1}}$ donc
$$\|f_n^{(k)}\|_{\infty,\mathbb{R}} \leq \frac{k!}{n^{k+1}} \text{ et la série } \sum_{n\geq 1} \frac{k!}{n^{k+1}} \text{ converge } (k \geq 1)$$
Par suite, la série $\sum f_n^{(k)}$ CN sur $\mathbb{R}$ donc CU sur $\mathbb{R}$.

Finalement, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 34. **1.** Soit $x \in [0, +\infty[$. On a $|u_n(x)| \leq \dfrac{1}{1+n^2}$ et la série $\sum \dfrac{1}{1+n^2}$ converge donc la série $\sum u_n$ CN sur $[0, +\infty[$.

2. Soit $a > 0$ et $x \in [a, +\infty[$. On a :
$$|nu_n(x)| \leq \frac{n\,\mathrm{e}^{-na}}{1+n^2} \quad \text{et} \quad |n^2 u_n(x)| \leq \frac{n^2\,\mathrm{e}^{-na}}{1+n^2}$$
Les séries $\sum \dfrac{n\,\mathrm{e}^{-na}}{1+n^2}$ et $\sum \dfrac{n^2\,\mathrm{e}^{-na}}{1+n^2}$ convergent puisque $\dfrac{n\,\mathrm{e}^{-na}}{1+n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\dfrac{n^2\,\mathrm{e}^{-na}}{1+n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc les séries $\sum_{n\geq 1} nu_n$ et $\sum_{n\geq 1} n^2 u_n$ CN sur $[a, +\infty[$.

3. Chaque u_n est continue sur $[0, +\infty[$ et la série $\sum u_n$ CU sur $[0, +\infty[$, donc par le théorème de continuité sous le signe somme, la fonction u est continue sur $[0, +\infty[$.

4. On a $u_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et la série $\sum u_n$ CU sur $[0, +\infty[$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$.

5. Chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et $u_n'(x) = -nu_n(x)$, $u_n''(x) = n^2 u_n(x)$.

- La série $\sum u_n$ CS sur $]0, +\infty[$ et la série $\sum u_n'$ CS sur $]0, +\infty[$ puisque $u_n'(x) = \dfrac{n\,\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ pour tout $x > 0$.
- Pour tout $a > 0$, la série $\sum u_n''$ CN sur $[a, +\infty[$ donc CU sur $[a, +\infty[$.

Donc la fonction u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et on a :
$$\forall x > 0,\quad u''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2\,\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}.$$

6. Soit $x > 0$. On a :
$$u''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+n^2-1)\,\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-x})^n = -u(x) + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$$
donc $u''(x) + u(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$ pour tout $x > 0$.

Corrigé de l'exercice 35. **1.** Une étude de fonction montre que $\|g_n\|_{\infty,]0,+\infty[} = g_n(n) = \dfrac{1}{2n}$ et la série $\sum \dfrac{1}{2n}$ diverge donc la série $\sum g_n$ ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$.

2. Soit $x > 0$. La fonction $t \longmapsto \dfrac{x}{t^2+x^2}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$ donc
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \int_k^{k+1} \frac{x}{t^2+x^2}\mathrm{d}t \leq \frac{x}{k^2+x^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{x}{t^2+x^2}\mathrm{d}t.$$

En sommant ces inégalités, on obtient : $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{x}{t^2+x^2}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{k^2+x^2} \leq \int_0^{n} \frac{x}{t^2+x^2}\mathrm{d}t.$

3. On fait tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{t^2+x^2}\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{x}{t^2+x^2}\mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{t^2+x^2}\mathrm{d}t = \left[\arctan\left(\frac{t}{x}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\displaystyle\int_0^{n} \frac{x}{t^2+x^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout x non nul,

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \leq \frac{\pi}{2}.$$

4. On fait tendre x vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \frac{\pi}{2}$. Si la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$ alors : $\displaystyle\frac{\pi}{2} = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$ ce qui est absurde. Ainsi, La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n$ ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.