TD N°6

Suites et séries de fonctions

1 Suites de fonctions

Exercice 1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions :

1. $f_n(x) = (\sin x)^n$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. $f_n(x) = x^2 \mathrm{e}^{-nx}$ sur $[0, +\infty[$.
3. $f_n(x) = nx^n(1 - x^2)$ sur $[0, 1]$.
4. $f_n(x) = x^n(1 - x)$ sur $[0, 1]$.
5. $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \le x \le 1/n \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \ge 1/n \end{cases}$ sur $[0, +\infty[$.
6. $f_n(x) = \left(x + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^2$ sur $[0, +\infty[$.
7. $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x)^{1+1/n}}$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2. Soit la suite $(f_n)_n$ de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{n(x^3 + x)\mathrm{e}^{-x}}{nx + 1}$.

1. Déterminer la limite simple f de la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $[0, +\infty[$.
2. La convergence de $(f_n)_n$ vers f est-elle uniforme sur $[0, +\infty[$?
3. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$.

Exercice 3. `Fonction « bosse glissante ».` Étudier la convergence simple et uniforme de $f_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x & \text{si } 0 \le x \le 1/2n \\ -2n^2\left(x - \dfrac{1}{n}\right) & \text{si } 1/2n \le x \le 1/n \\ 0 & \text{si } x \ge 1/n \end{cases}$. Montrer qu'on a la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 4. `Pour montrer que la convergence n'est pas uniforme ...`

1. Soient E et F deux evn de dimensions finies et X une partie de E. On considère $(f_n)_n$ une suite de fonctions de X vers F converge simplement sur X vers une fonction f.
On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ telle que la suite $\big(f(x_n) - f(x_n)\big)_n$ ne tende pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1 + n^2 x^2}$.
   - **a.** Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$.
   - **b.** Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1 + n^2 t^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $[0, 1]$.
2. Soit $a \in]0, 1[$. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[a, 1]$?
3. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n \ge 1}$.

Exercice 6. `D'après Centrale MP 2019.` On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\ge1}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right)$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\ge1}$ converge simplement vers une fonction f à déterminer. **Indication :** vérifier que $\sin\left(\dfrac{t}{2^n}\right) f_n(t) = \dfrac{\sin t}{2^n}$.
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\ge1}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = x\big(1 + n^\alpha \mathrm{e}^{-nx}\big)$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.
2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 x\big(1 + \sqrt{n}\,\mathrm{e}^{-nx}\big)\mathrm{d}x$.

Exercice 8. `Mines-Ponts MP 2006.` Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[1,+\infty[$ par $f_n(x) = n\left(x^{1/n} - 1\right)$.
Étudier la convergence simple et uniforme de cette suite de fonctions sur $[1,+\infty[$ puis sur les segments $[1,a]$ où $a > 1$.

Exercice 9. `CCP PSI 2005.` Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_n$ où $f_n(x) = \cos\left(x\,\mathrm{e}^{-nx^2}\right)$, et en déduire la limite de la suite $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 10. `CCP MP 2006.`

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où f_n est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = \dfrac{nx^2\,\mathrm{e}^{-nx}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}$.
2. Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction g définie pour $x \geq a$ par $g(x) = \dfrac{x^2\,\mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}$ est bornée sur $[a,+\infty[$ et en déduire que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

Exercice 11. Soient E, F, G des evn de dimensions finies et X une partie de E.
On considère $(f_n)_n$ une suite de fonctions de X vers F et $f : X \longrightarrow F$, $\ g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. On suppose que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f et g uniformément continue. Montrer que la suite de fonctions $\left(g\circ f_n\right)_n$ converge uniformément vers $g\circ f$.
2. Le résultat précédent reste-t-il vrai si on remplace l'hypothèse d'uniforme continuité par celle de continuité ?

Exercice 12. `De la convergence simple à la convergence uniforme.` Soient E et F deux evn de dimensions finies et K un compact de E.
On considère $(f_n)_n$ une suite de fonctions de K vers F convergeant simplement vers une fonction f. On suppose :

$$\forall (x_n)_n \in K^{\mathbb{N}},\quad x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \in K \implies f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

1. Montrer que f est continue. **Indication :** utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité.
2. Montrer la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$. **Indication :** raisonner par l'absurde.

Exercice 13. Soient X une partie d'un evn E de dimension finie, $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur X, convergeant uniformément sur X vers une fonction f et $(u_n)_n$ une suite de X convergeant vers un élément $\ell \in X$.

1. Montrer que si, $\sigma, \tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sont deux extractrices, alors la suite $\left(f_{\sigma(n)}(u_{\tau(n)})\right)_n$ converge vers $f(\ell)$.
2. **Application :** Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers f.
   - **a.** Montrer que, si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors la suite $\left(f_n\circ f_n\right)_n$ converge simplement vers $f\circ f$. **Indication :** on pourra utiliser la question précédente.
   - **b.** Montrer que, si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors la suite $\left(f_n\circ f_n\right)_n$ converge uniformément vers $f\circ f$.
   - **c.** Le résultat précédent reste-t-il vrai si on remplace l'hypothèse de continuité uniforme de f par la continuité de f ? **Indication :** considérons, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\ f_n\ :\ x\in\mathbb{R} \longmapsto x^2 + \dfrac{1}{n^2}$ et $f\ :\ x \in\mathbb{R} \longmapsto x^2$.

2 Approximations uniformes

Exercice 14. Construire, le plus simplement possible, une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément sur $[0,\pi]$ vers la fonction sinus.

Exercice 15. `Classique.` Soit $f \in \mathcal{C}^0\left([a,b],\mathbb{C}\right)$ telle que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

Application : Soit $f \in \mathcal{C}^0\left([a,b],\mathbb{C}\right)$ telle que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b \left(\prod_{k=0}^{n-1}(t+k)\right) f(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 16. `D'après CNC MP 2019.` Soient a et b des réels tels que $a < b$, et soit $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $J_n(h) = \displaystyle\int_a^b h(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que si h est une fonction constante, alors la suite $\left(J_n(h)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que si h est en escalier sur $[a,b]$, alors la suite $\left(J_n(h)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. En utilisant un résultat d'approximation à préciser, montrer que la suite $\left(J_n(h)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 17. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes telle que, en notant $A_n = P_n(X^k)$, la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 18. Soit $p \in \mathbb{N}$ non nul et $(P_n)_n$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}_p[X]$. On suppose que la suite de fonctions polynômes associée converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

1. Montrer que f est une fonction polynôme de degré $\leq p$ et que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$. **Indication :** utiliser les polynômes de Lagrange.

2. Que dire de cette suite si la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 19. On note $(P_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions définie par $P_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - \left(P_n(t)\right)^2\right)$.

1. Démontrer $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ 0 \leq \sqrt{t} - P_n(t) \leq \dfrac{2\sqrt{t}}{2+n\sqrt{t}}$.

2. En déduire que $(P_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $f : t \longmapsto \sqrt{t}$.

3. Montrer que la suite de polynômes $(Q_n)_{n\geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [-1,1],\ Q_n(t) = \left(P_n(|t|)\right)^2$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers $\varphi : t \longmapsto |t|$.

3 Séries de fonctions

Exercice 20. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de X vers F. Montrer que, si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X, alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} 0$ sur X.
Application : Soit $(f_n)_n$ la série de fonctions définie par : $f_n(x) = nx^2\,\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$, $x \in [0,+\infty[$.
La série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$? Montrer qu'on a la convergence uniforme sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 21. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,+\infty[$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n+n^3x^2}$.

1. Vérifier que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

2. La série $\sum f_n$ converge normalement sur $]0,+\infty[$? Montrer qu'on a la convergence normale sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

3. La série $\sum f_n$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$? Montrer qu'on a la convergence uniforme sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 22. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,+\infty[$, $f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right)$.

1. Vérifier que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

2. La série $\sum f_n$ converge absolument sur $[0,+\infty[$? converge normalement sur $[0,+\infty[$?

3. Montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Exercice 23. Soit $\alpha \in [0,+\infty[$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,+\infty[$, $f_n(x) = \dfrac{x^\alpha}{x^2+n^2}$.
Déterminer l'ensemble des $\alpha \in [0,+\infty[$ tels que la série $\sum f_n$ converge uniformément $[0,+\infty[$.

Exercice 24. `CCP MP 2006.` Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n^\alpha}\mathrm{e}^{-nx}$.

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum u_n$.

2. Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence normale sur $[0,1]$?

Exercice 25. `CCP MP 2007, Centrale PC 2007.`

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum u_n$ où $u_n(x) = \exp(-x\sqrt{n})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On note S la somme de cette série de fonctions.

2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = 0$.

4. Montrer que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 26. Montrer que l'application $z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$ est définie et continue sur $\mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$.

Exercice 27. `D'après CNC MP 2020.` On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie sur $[0,+\infty[$ par : $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\mathrm{e}^{-nx}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$. On noterra g sa somme.

2. Justifier que g est continue sur $[0,+\infty[$.

3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et donner une expression simple de sa dérivée à l'aide de fonctions usuelles.

4. En admettant que $g(0)=\ln(2)$ donner une expression simple de g l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 28. **1.** Étudier les convergences sur $]1,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ où $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{nx+(-1)^n}$.

2. On note S sa somme. Montrer que $S(x) \underset{x\to+\infty}{=} 1-\dfrac{\ln 2}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. **Indication :** on pourra utiliser $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=-\ln 2$.

Exercice 29. `CCP MP 2007.` Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit une fonction u_n sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x)=\dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$. On note S la somme de la série de fonctions $\sum u_n$ lorsqu'elle existe. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 30. Soit $a>0$. Montrer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^a}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{na+1}$. **Indication :** remarquons que $\dfrac{1}{na+1}=\displaystyle\int_0^1 t^{na}\mathrm{d}t$.

Exercice 31. **1.** Soit $r\in\,]-1,1[$. On pose pour $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\cos(nx)}{n}$. Vérifier que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x\in\mathbb{R}$. On pose pour $r\in\,]-1,1[$, $g(r)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\cos(nx)}{n}$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$, déterminer une expression simple de $g'(r)$ et calculer $g(r)$ pour $r\in\,]-1,1[$.

3. En déduire $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1-2r\cos x+r^2\right)\mathrm{d}x=-2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r^n\cos(nx)}{n}\mathrm{d}x\right)$ ainsi que la valeur de l'intégrale.

Exercice 32. `TPE MP 2005.` Pour $n\geq 2$, on définit une fonction f_n sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x)=\dfrac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$. On notera f la somme de cette série de fonctions.

2. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a,+\infty[$ où $a>0$ mais pas sur $[0,+\infty[$.

3. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

4. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Montrer que f n'est pas dérivable en 0 à droite.

5. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k f(x)=0$.

Exercice 33. `Centrale PSI 2005.` Montrer que la fonction f définie par $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 34. `D'après CNC MP 2023.` On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie sur $[0,+\infty[$ par : $u_n(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$.

2. Montrer que, pour tout $a>0$, les séries $\sum\limits_{n\geq 1} nu_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} n^2u_n$ convergent normalement sur $[a,+\infty[$.

Dans la suite, on pose $u(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x),\quad x\geq 0$.

3. Montrer, en précisant le théorème utilisé, que la fonction u est continue sur $[0,+\infty[$.

4. Montrer de même que la fonction u admet 0 pour limite en $+\infty$.

5. Montrer que la fonction u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et donner une expression de sa dérivée seconde sous la forme de la somme d'une série de fonctions.

6. Montrer que $\forall x>0,\quad u''(x)+u(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$.

Exercice 35. `D'après CCINP MP 2025.` On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} g_n$ où pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $g_n(x)=\dfrac{x}{n^2+x^2}$.

1. Étudier la convergence normale de cette série de fonctions sur $]0,+\infty[$.

2. Établir que, pour n entier non nul, $\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{x}{t^2+x^2}\mathrm{d}t\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k^2+x^2}\leq\int_0^n\frac{x}{t^2+x^2}\mathrm{d}t$.

3. En déduire que, pour tout x non nul, $\dfrac{\pi}{2}-\arctan\dfrac{1}{x}\leq\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}g_n(x)\leq\frac{\pi}{2}$.

4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}g_n(x)$. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} g_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$.