

Chapitre 12

Calcul différentiel et optimisation

M. BINYZE

<https://supspé.com>

CPGE Laâyoune

Filière MP

2025-2026

- 1 Différentiabilité
- 2 Classe d'une fonction
- 3 Vecteurs tangents à une partie
- 4 Optimisation

Plan

1 Différentiabilité

2 Classe d'une fonction

3 Vecteurs tangents à une partie

4 Optimisation

Dans ce chapitre est sauf indication contraire :

- E, F, G et H désignent des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés de dimensions finies non nulles.
- I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
- U désigne un ouvert de E et V désigne un ouvert de F .

Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $a \in U$.

Définition 1.1 (dérivée selon un vecteur, dérivées partielles).

- 1 Soit $v \in E$ non nul. On dit que f est **dérivable en a selon v** si l'application $\varphi_v : t \longmapsto f(a + t.v)$ est dérivable en 0. Dans ce cas, on note

$$D_v f(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{1}{t} (f(a + t.v) - f(a))$$

appelé **la dérivée de f en a selon le vecteur v** .

- 2 Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Lorsqu'elle existe, on appelle **j -ème dérivée partielle de f en a dans la base $\mathcal{E}$** la dérivée de f en a selon le vecteur e_j . Celle-ci est notée $D_j f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.



Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ on peut identifier $x \mapsto f(x)$ et la fonction de n variables réelles $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$. Ainsi

$$D_j f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{d}{dt} (f(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n)) \Big|_{t=x_j}.$$



Soit $a = (-1, 1)$, $v = (1, 0)$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x + y, x - y).$$

Pour $t \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} (f(a + t.v) - f(a)) &= \frac{1}{t} (f(t - 1, 1) - f(-1, 1)) \\ &= \frac{1}{t} ((t, t - 2) - (0, -2)) \\ &\xrightarrow[t \rightarrow 0]{} (1, 1). \end{aligned}$$

Donc $D_v f(a) = (1, 1)$.



Dérivées partielles de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2y - e^{x+y}$ dans la base canonique.

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{1}{t} (f((x, y) + t.e_1) - f(x, y)) \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{1}{t} ((x+t)^2 y - e^{x+y+t} - x^2 y + e^{x+y}) \\ &= 2xy - e^{x+y}. \end{aligned}$$

De même $D_2 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - e^{x+y}.$

Définition 1.2 (application différentiable).

- 1 On dit que f est **différentiable en** a s'il existe $\ell \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que

$$\frac{1}{\|h\|} (f(a+h) - f(a) - \ell(h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0_F.$$

Dans ce cas ℓ est **unique** et appelé¹ la **différentielle** de f au point a . On note $\ell = df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$.

- 2 On dit que f est **différentiable sur** U si f est différentiable en tout point de U .

¹ou l'application linéaire **tangente**.



Matrice jacobienne

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable en a , on appelle **matrice jacobienne de f en a** la matrice de l'application linéaire $df(a)$ dans les bases canoniques. On la note $J_f(a)$.

Proposition 1.1 (différentiabilité vs DL1).

f est différentiable en a si, et seulement si, f admet¹ un **développement limité à l'ordre 1 en a** :

$$f(a + h) = f(a) + df(a).h + o(\|h\|).$$

¹ $o(\|h\|) = \|h\|.\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \longrightarrow 0_F$ quand $h \longrightarrow 0_E$.



- 1 Si f est constante, alors $df(a) = 0$.
- 2 Différentielle de $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f(A+H) &= (A+H)^2 \\ &= A^2 + AH + HA + H^2 \\ &= f(A) + \underbrace{AH + HA}_{\ell(H)} + H^2. \end{aligned}$$

D'une part, l'application ℓ est linéaire. D'autre part, en introduisant une norme sous-multiplicative¹ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\|H^2\| \leq \|H\|^2 = \|H\| \times \|H\| \underset{H \rightarrow O_n}{=} o(\|H\|).$$

Donc f est différentiable et pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$df(A).H = AH + HA.$$

¹La norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$. (sous-multiplicativité)

Proposition 1.2 (différentielle vs dérivée selon un vecteur).

Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et f **différentiable** en a .

1 f est continue en a .

2 f admet une dérivée en a selon tout vecteur v non nul de E et

$$D_v f(a) = \mathrm{d}f(a).v.$$

En particulier, f admet des dérivée partielles en a . De plus

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \mathrm{d}f(a).e_i$$

et

$$\forall h = \sum_{i=1}^n h_i e_i \in E, \quad \mathrm{d}f(a).h = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Proposition 1.3 (cas linéaire et bilinéaire).

- 1 *Toute application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est différentiable sur E et*

$$\forall a \in E, \quad \mathrm{d}f(a) = f.$$

- 2 *Toute application bilinéaire $f : E \times F \longrightarrow G$ est différentiable sur $E \times F$ et*

$$\forall (a, h) \in E, \forall (b, k) \in F, \quad \mathrm{d}f(a, b).(h, k) = f(a, k) + f(h, b).$$

Proposition 1.4 (dérivée vs différentielle).

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow F$ et $a \in I$. f est différentiable en a si, et seulement si, f est dérivable en a . Dans ce cas :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{d}f(a).h = h.f'(a).$$

En particulier $f'(a) = \mathrm{d}f(a).1$.

Proposition 1.5 (linéarité).

Si $f, g : U \rightarrow F$ sont différentiables en a , alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ est différentiable en a et

$$\forall h \in E, \quad d(f + \lambda g)(a).h = d(f)(a).h + \lambda d(g)(a).h.$$

Théorème 1.1 (composée).

Soit $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow G$ tel que $f(U) \subset V$. Si f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$\forall h \in E, \quad d(g \circ f)(a).h = \left(dg(f(a)) \circ df(a) \right).h.$$



$$d(f^\alpha) = \alpha f^{\alpha-1} df, \quad d(e^f) = e^f df, \quad d(\ln f) = \frac{df}{f}, \quad d\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{df}{f^2}, \text{ etc.}$$

Corollaire 1.1 (dérivée le long d'un arc).

Si $\gamma : I \longrightarrow E$ est dérivable en t et $f : E \longrightarrow F$ est différentiable en $\gamma(t)$, alors l'application $f \circ \gamma : I \longrightarrow F$ est dérivable en t et

$$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

En particulier, $(f(x + th))' = df(x + th) \cdot h$.

Corollaire 1.2 (dérivation de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$).

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur l'ouvert U et $x_1, \dots, x_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur I telles que :

$$\forall t \in I, (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in U.$$

Alors la fonction

$$\begin{aligned} g &: I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned}$$

est dérivable sur I et pour tout $t \in I$,

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n x'_i(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Corollaire 1.3 (règle de la chaîne).

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur l'ouvert U et $x_1, \dots, x_n : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions différentiables sur l'ouvert V telles que :

$$\forall (t_1, \dots, t_p) \in V, \quad (x_1(t_1, \dots, t_p), \dots, x_n(t_1, \dots, t_p)) \in U.$$

Alors l'application

$$\begin{aligned} g : \quad V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t_1, \dots, t_p) &\longmapsto f(x_1(t_1, \dots, t_p), \dots, x_n(t_1, \dots, t_p)) \end{aligned}$$

est différentiable sur V et pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\frac{\partial g}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_p) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial t_i}(t_1, \dots, t_p) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1(t_1, \dots, t_p), \dots, x_n(t_1, \dots, t_p)).$$



Si $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ alors,

$$g : t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$g'(t) = -\sin(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\cos(t), \sin(t)) + \cos(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\cos(t), \sin(t)).$$



Si $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ alors,

$$g : (r, \theta) \mapsto f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ \quad + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\ \quad + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{array} \right.$$

Proposition 1.6 (fonctions coordonnées).

Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de F . On écrit pour $x \in U$, $f(x) = \sum_{i=1}^p f_i(x) \varepsilon_i$.

Alors f est différentiable en a si, et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, f_i est différentiable en a . Dans ce cas

$$\forall h \in E, \quad df(a).h = \sum_{i=1}^p (df_i(a).h) \cdot \varepsilon_i.$$

Proposition 1.7 (composée par application bilinéaire).

Soit $B : F \times G \longrightarrow H$ une application bilinéaire. Si $f : U \longrightarrow F$ et $g : U \longrightarrow G$ sont différentiables en a alors, l'application $B(f, g)$ est différentiable en a et

$$\forall h \in E, \quad dB(f, g)(a).h = B(df(a).h, g(a)) + B(f(a), dg(a).h).$$

Proposition 1.8 (composée par application multilinéaire).

Soit $m : F_1 \times \dots \times F_k \longrightarrow H$ une application multilinéaire.

Si, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $f_i : U \longrightarrow F_i$ est différentiable en a alors, l'application $m(f_1, \dots, f_k)$ est différentiable en a et pour tout $h \in E$,

$$dm(f_1, \dots, f_k)(a).h = \sum_{i=1}^k m(f_1(a), \dots, f_{i-1}(a), df_i(a).h, f_{i+1}(a), \dots, f_k(a)).$$



- 1 Toute application polynomiale est différentiable.
- 2 $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable car polynomiale en les coefficients de la matrice.

$(E, (\cdot | \cdot))$ désigne un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$.

Théorème 1.2 (vecteur gradient).

Si f est différentiable en a alors il existe un **unique** vecteur de E noté $\nabla f(a)$, appelé **gradient** de f en a vérifiant

$$\forall h \in E, \quad df(a).h = (\nabla f(a) | h).$$

De plus, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une b.o.n de E , alors

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).e_i.$$



Si f est une fonction de p variables réelles alors

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right).$$

Plan

- 1 Différentiabilité
- 2 Classe d'une fonction**
- 3 Vecteurs tangents à une partie
- 4 Optimisation

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $a \in U$.

Définition 2.1 (fonction de classe $\mathcal{C}^1$).

On dit que f est de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur U si elle est différentiable sur U et¹ si l'application $df : a \longmapsto df(a)$ est continue sur U .

¹Les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont continues car différentiables.

Théorème 2.1 (théorème fondamental).

On a équivalence entre :

- 1 f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ;
- 2 les dérivées partielles de f dans une base¹ de E existent en tout point de U et sont continues sur U .

¹La notion ne dépend pas du choix de la base utilisée.

Proposition 2.1 (formule d'intégration).

1 Soit $\gamma \in \mathcal{C}^1(I, U)$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

$$\forall (\alpha, \beta) \in I^2, \int_{\alpha}^{\beta} df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = f(\gamma(\beta)) - f(\gamma(\alpha)).$$

2 Si U est convexe alors

$$\forall (a, b) \in U^2, \int_0^1 df(a + t(b - a)) \cdot (b - a) dt = f(b) - f(a).$$

Proposition 2.2 (caractérisation des applications constantes).

Soit U un ouvert connexe par arcs et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

f est constante sur U si, et seulement si, pour $x \in U$, $df(x) = 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Définition 2.2 (dérivées partielles d'ordre supérieur).

- 1 La fonction f est appelée **dérivée partielle d'ordre 0 de f** .
- 2 Sous réserve d'existence, on appelle **dérivées partielles d'ordre $k + 1$ de f** les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre k de f .

Notations :

- 1 Si l'on note $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$, on note

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\dots \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \dots \right) \right).$$

- 2 Pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ avec $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_p$ et $(i_1, \dots, i_p) \in \llbracket 1, n \rrbracket^p$, on note

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \partial x_{i_2}^{\alpha_2} \dots \partial x_{i_p}^{\alpha_p}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1}} \left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_{i_2}^{\alpha_2}} \left(\dots \left(\frac{\partial^{\alpha_p} f}{\partial x_{i_p}^{\alpha_p}} \right) \dots \right) \right)$$

et lorsqu'elle existe, l'application

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \partial x_{i_2}^{\alpha_2} \dots \partial x_{i_p}^{\alpha_p}} : U \longrightarrow F$$

est appelée **dérivée partielle d'ordre α de f** .

Définition 2.3 (fonction de classe $\mathcal{C}^k$).

- 1 On dit que f est de **classe** $\mathcal{C}^k$ sur U si¹ ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur U . On note $\mathcal{C}^k(U, F)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de U dans F .
- 2 On dit que f est de **classe** $\mathcal{C}^\infty$ sur U si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{C}^\infty(U, F)$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de U dans F .

¹Les fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ correspondent aux fonctions continues.

Proposition 2.3 (propriétés).

- 1 L'ensemble $\mathcal{C}^k(U, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(U, F)$.
- 2 Si F est une $\mathbb{R}$ -algèbre alors $\mathcal{C}^k(U, F)$ est de plus une $\mathbb{R}$ -algèbre.
- 3 La composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$ est de classe $\mathcal{C}^k$.
- 4 Une application est de classe $\mathcal{C}^k$ si, et seulement si, ses fonctions coordonnées le sont.

Théorème 2.2 (théorème de Schwartz).

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U alors¹

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

¹Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$, l'ordre de dérivation n'importe pas dans le calcul d'une dérivée partielle d'ordre k .

Plan

- 1 Différentiabilité
- 2 Classe d'une fonction
- 3 Vecteurs tangents à une partie
- 4 Optimisation

Vecteurs tangents à une partie

$\mathcal{A}$ désigne une partie de E .

Définition 3.1 (vecteur tangent à une partie).

Un vecteur $v \in E$ est dit **tangent** à $\mathcal{A}$ en $a \in \mathcal{A}$ s'il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{A}$ dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. On note $T_a \mathcal{A}$ l'ensemble des **vecteurs tangents** à $\mathcal{A}$ en a .



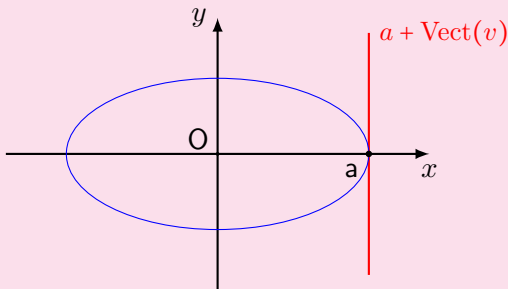
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $t_0 \in I$. Notons $\mathcal{A} = \{(t, f(t)), t \in I\}$ le graphe de f . Le vecteur $v = (1, f'(t_0))$ est tangent à $\mathcal{A}$ en $a = (t_0, f(t_0))$. En effet :

- $\exists \varepsilon > 0, \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, t + t_0 \in I$. (car I est un intervalle ouvert)
- Soit $\gamma : t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\mapsto (t + t_0, f(t + t_0)) \in \mathcal{A}$. On a γ est dérivable en 0 et vérifie : $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.



Soit $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 4y^2 = 4\}$, $a = (2, 0)$ et $v = (0, 1)$.

- Soit $\gamma :]-1, 1[\longrightarrow \mathcal{A}$ définie par $\gamma(t) = (2\sqrt{1-t^2}, t)$.
- γ est dérivable en 0 et $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = v$, donc v est un vecteur tangent à $\mathcal{A}$ en a .



Définition 3.2 (surface).

On appelle **surface représentative** de $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'ensemble

$$\mathcal{S}_f \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad z = f(x, y) \right\}.$$

Théorème 3.1 (plan tangent à une surface).

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $(x_0, y_0) \in U$. La surface $\mathcal{S}_f$ admet au point (x_0, y_0, z_0) avec $z_0 = f(x_0, y_0)$ un plan affine tangent d'équation :

$$z = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + f(x_0, y_0).$$

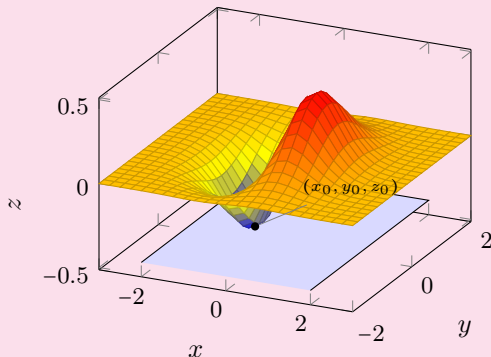


Soit la surface d'équation $z = x e^{-x^2-y^2}$ et $(x_0, y_0) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

On pose $f(x, y) = x e^{-x^2-y^2}$. f est différentiable en (x_0, y_0) et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

L'équation du plan tangent à $\mathcal{S}_f$ en (x_0, y_0, z_0) est $z = -\frac{1}{\sqrt{2}e}$.



Définition 3.3 (ligne de niveau).

Soit $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

- 1 L'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in U, f(x) = c\}$ est appelé la **ligne de niveau** c de f .
- 2 Si $\dim E = 3$ (resp. $\dim E = 2$), $\mathcal{A}$ est appelé la **surface de niveau** (resp. la **courbe de niveau**) c de f .

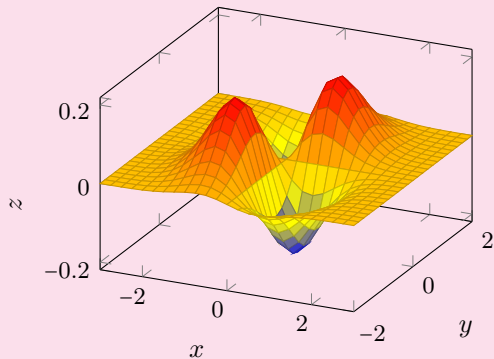


Figure: Tracé de $f(x, y) = xy e^{-x^2 - y^2}$

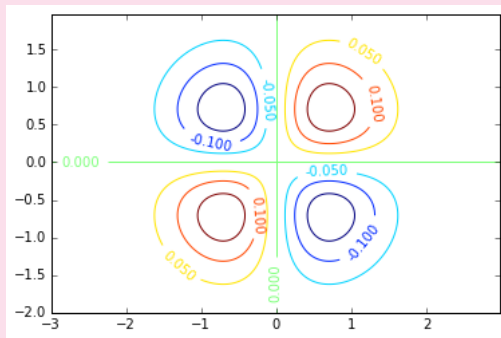


Figure: courbes de niveau de f

Théorème 3.2.

Soit $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{A}$ une ligne de niveau de f . Si $a \in \mathcal{A}$ tel que $df(a) \neq 0$, alors

$$T_a \mathcal{A} = \ker(df(a)).$$

Proposition 3.1 (gradient vs vecteurs tangents).

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace euclidien et $\mathcal{A}$ une ligne de niveau de f . Si f est différentiable en $a \in \mathcal{A}$, alors

$$\forall v \in T_a \mathcal{A}, \quad (v | \nabla f(a)) = 0.$$

Plan

- 1 Différentiabilité
- 2 Classe d'une fonction
- 3 Vecteurs tangents à une partie
- 4 Optimisation

Étude au premier ordre

Dans ce paragraphe, les applications considérées sont définies sur l'**ouvert** U de E à valeurs réelles (numériques).

Définition 4.1 (minimum, maximum).

Soit $\mathcal{A}$ une partie de E .

- 1 On dit que $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ admet un **minimum global** (ou **absolu**) (resp. **maximum global**) en $a \in \mathcal{A}$ si

$$\forall x \in \mathcal{A}, f(x) \geq f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \leq f(a))$$

- 2 On dit que $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ admet un **minimum local** (resp. **maximum local**) en $a \in \mathcal{A}$ si

$$\exists r > 0, \forall x \in \mathcal{A} \cap B(a, r), f(x) \geq f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \leq f(a))$$

- 3 On dit que $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ admet un **extremum local** (resp. **extremum global**) en $a \in \mathcal{A}$ si f admet un maximum ou un minimum local (resp. un maximum ou un minimum global) en a .

Définition 4.2 (point critique).

On dit que $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un **point critique**¹ en $a \in U$ si f est différentiable en a et $df(a) = 0$.

¹On rappelle ici que U est un **ouvert**.

Proposition 4.1 (caractérisation des points critiques).

Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$ alors

$$a \text{ point critique de } f \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$$

Proposition 4.2 (points critiques vs extremums).

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$ et admet un extremum local en a alors¹ f admet un point critique en a .

¹La réciproque est fausse.



Extremums de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 1$.

- f est différentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.
- Points critiques de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$$

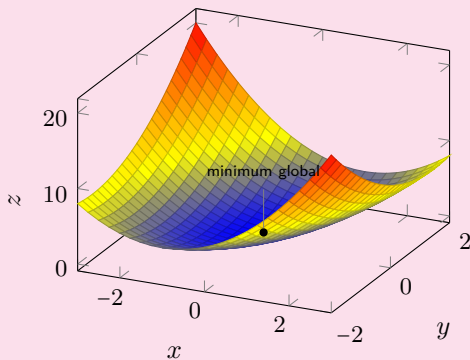
donc $(0, 0)$ est le seul point critique de f .

- Étude du signe de la différence $f(x, y) - f(0, 0)$: on a

$$f(x, y) - f(0, 0) = x^2 + y^2 - xy = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0.$$

Donc f admet un minimum global en $(0, 0)$.

Tracé de $z = f(x, y)$



Proposition 4.3.

Soit $\mathcal{A}$ une partie de U et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \mathcal{A}$.
Si la restriction de f à $\mathcal{A}$ admet un extremum local en a alors

$$\forall v \in T_a \mathcal{A}, \quad df(a).v = 0.$$

Théorème 4.1 (optimisation sous une contrainte).

Soit $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U . Si la restriction de f à $\mathcal{A} = \{x \in U, g(x) = 0\}$ admet un extremum local en $a \in \mathcal{A}$ tel que $dg(a) \neq 0$ alors

$$df(a) \text{ est colinéaire à } dg(a).$$



Cas où E est euclidien

Lorsque E est un espace euclidien alors le résultat du théorème précédent s'écrit

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \nabla f(a) = \lambda \cdot \nabla g(a) .$$



Extréma de $f(x, y) = xy$ sur $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ x^2 + y^2 = 1\}$.

- $\mathcal{A}$ est compact car fermé borné de $\mathbb{R}^2$ donc les extréma de f existent.
- Cherchons d'abord les points critiques de f . Si $a = (x, y)$ est un point critique de f alors



$$\begin{cases} y &= 2\lambda x \\ x &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases} \implies a = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Il y a donc 4 points critiques. Or

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

et

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Le maximum de f est $\frac{1}{2}$ et son minimum est $-\frac{1}{2}$.

Définition 4.3 (matrice hessienne).

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U . On appelle **matrice hessienne** de f en a , la matrice notée $H_f(a)$ définie par¹ :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

¹D'après le théorème de Schwartz, $H_f(a) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 4.2 (développement de Taylor à l'ordre 2).

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in U$.

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + (\nabla f(a) \mid h) + \frac{1}{2}(H_f(a).h \mid h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2) \\ &= f(a) + \nabla f(a)^\top . h + \frac{1}{2}h^\top . H_f(a).h + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2) \end{aligned}$$

Théorème 4.3 (matrice hessienne vs extremums).

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in U$.

- 1 Si f admet un minimum (resp. maximum) local en a alors $\text{Sp}(H_f(a)) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $\text{Sp}(H_f(a)) \subset \mathbb{R}_-$).
- 2 Supposons f admet un point critique en $a \in U$.
 - 1 Si $\text{Sp}(H_f(a)) \subset \mathbb{R}_+^*$ (resp. $\text{Sp}(H_f(a)) \subset \mathbb{R}_-^*$) alors f admet un minimum (resp. maximum) local strict¹ en a .
 - 2 Si $\text{Sp}(H_f(a)) \subset \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^*$ alors f n'admet pas d'extremum local en a .

¹minimum (resp. maximum) local strict en $a : \exists r > 0, \forall x \in U \cap B(a, r) \setminus \{a\}, f(x) > f(a)$ (resp. $f(x) < f(a)$).

Corollaire 4.1 (cas de la dimension 2).

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et a un point critique de f .

1 Si

$$\det(H_f(a)) > 0 \text{ et } \operatorname{Tr}(H_f(a)) > 0$$

alors f admet un minimum local strict en a .

2 Si

$$\det(H_f(a)) > 0 \text{ et } \operatorname{Tr}(H_f(a)) < 0$$

alors f admet un maximum local strict en a .

3 Si $\det(H_f(a)) < 0$ alors f n'admet pas d'extremum en a .

Théorème 4.4 (extremums en dimension 2).

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et a un point critique de f . On note

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

(notation de Hesse en dimension 2)

- 1 Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ alors f admet un minimum local en a .
- 2 Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ alors f admet un maximum local en a .
- 3 Si $rt - s^2 < 0$ alors f n'a pas d'extremum en a . (on dit que a est un **point-col** ou **point-selle**)
- 4 Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.



Extremums de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.

- f est différentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ car polynomiale.
- Points critiques de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \iff \begin{cases} (x, y) = (1, 1) \\ \text{ou} \\ (x, y) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

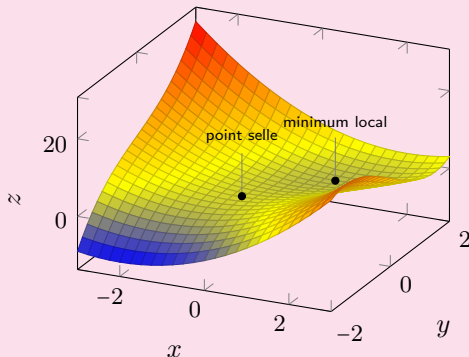
donc $(1, 1)$ et $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ sont les seuls points critiques de f .

- Au point $(1, 1)$, $r = 2$, $s = -2$ et $t = 6$ donc $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, donc f admet un minimum local en $(1, 1)$.



- Au point $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $r = 2$, $s = -2$ et $t = -2$ donc $rt - s^2 < 0$ donc $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ est un point selle de f .

Tracé de $z = f(x, y)$



*Merci
pour votre
attention!*