

## rappel MPSI

## Intégrales généralisées (correction)

**Corrigé de l'exercice 1.** 1. La fonction  $f : t \mapsto \frac{t+1}{t^4+1}$  est cpm et positive sur  $[0, +\infty[$  et  $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$ . Comme  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$  converge (intégrale de Riemann  $\alpha = 3 > 1$ ) alors l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge.

2.  $f : t \mapsto \frac{\arctan t}{t}$  est cpm et positive sur  $]0, +\infty[$  et  $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 1$  donc  $f$  est prolongeable par continuité en 0 et  $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t}$ . Or  $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2t} dt$  diverge (intégrale de Riemann  $\alpha = 1$ ) alors l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  diverge.

3.  $f : t \mapsto \frac{t}{t^2+1}$  est cpm et positive sur  $[0, +\infty[$  et  $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ . Comme  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$  diverge (intégrale de Riemann  $\alpha = 1$ ) alors l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  diverge.

4.  $f : t \mapsto t \sin\left(\frac{1}{t}\right)$  est cpm sur  $[1, +\infty[$  et  $f(t) \underset{+\infty}{\sim} 1$ . Comme  $\int_1^{+\infty} 1 dt$  diverge alors l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  diverge.

5.  $f : t \mapsto t e^{-t^2}$  est cpm et positive sur  $[0, +\infty[$  et  $t^2 f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  donc  $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ . Comme  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  converge (intégrale de Riemann  $\alpha = 2 > 1$ ) alors l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge.

6.  $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t(t+1)}$  est cpm et positive sur  $[1, +\infty[$  et  $t^{3/2} f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  donc  $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ . Comme  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$  converge (intégrale de Riemann  $\alpha = 3/2 > 1$ ) alors l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  converge.

7.  $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t+1}$  est cpm et positive sur  $[1, +\infty[$  et  $t f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$  donc  $\frac{1}{t} \underset{+\infty}{=} o(f(t))$ . Comme  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$  diverge (intégrale de Riemann  $\alpha = 1$ ) alors l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  diverge.

8.  $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t^{3/2}}$  est cpm sur  $]0, +\infty[$  et

- au voisinage de  $0^+$  :  $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$  et  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$  diverge (intégrale de Riemann  $\alpha = 1$ ).
- au voisinage de  $+\infty$  :  $f(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$  converge (intégrale de Riemann  $\alpha = 3/2 > 1$ ) donc l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  converge absolument donc converge.

D'où l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  diverge.

9.  $f : t \mapsto \frac{\sqrt{1+t}-1}{t}$  est cpm sur  $]0, 1]$  et  $f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{1 + \frac{t}{2} + o(t) - 1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}$ . Donc  $f$  est prolongeable par continuité en  $0^+$  et l'intégrale  $\int_0^1 f(t) dt$  converge.

10.  $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$  est continue sur  $[0, 1[$  et  $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \left[ \arcsin t \right]_0^x = \arcsin x \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{\pi}{2}$ . Donc l'intégrale  $\int_0^1 f(t) dt$  converge et  $\int_0^1 f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) - F(0) = \frac{\pi}{2}$ .

11.  $f : t \mapsto \frac{1}{e^t-1}$  est cpm sur  $]0, 1]$  et  $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t}$ . Comme  $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$  diverge (intégrale de Riemann  $\alpha = 1$ ) alors l'intégrale  $\int_0^1 f(t) dt$  diverge.

12.  $f : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}$  est cpm sur  $]0, 1]$  et  $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ . Comme  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$  converge (intégrale de Riemann  $\alpha = 1/2 < 1$ ) alors l'intégrale  $\int_0^1 f(t) dt$  converge.

13.  $f : t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$  est cpm sur  $]0, 1[$  et

$$f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0, \quad f(t) \underset{t=1+h}{=} \frac{h}{\ln(1+h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} 1.$$

Donc  $f$  est prolongeable par continuité en 0 et 1 et l'intégrale  $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$  converge.

14.  $f : t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$  est cpm sur  $]0, +\infty[$  et

- au voisinage de  $0^+$  :

$$\sqrt{t}f(t) = \sqrt{t}\ln(1+t^2) - 2\sqrt{t}\ln t \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} 0$$

donc  $f(t) \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$  et l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$  converge (intégrale de Riemann  $\alpha = 1/2 < 1$ ).

- au voisinage de  $+\infty$  :  $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$  et l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  converge (intégrale de Riemann  $\alpha = 2 > 1$ ).

D'où l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge.

15.  $f : t \mapsto \ln t$  est continue sur  $]0, 1]$  et  $F(x) = \int_x^1 f(t) dt = [t \ln t - t]_x^1 = x - 1 - x \ln x \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{\quad} -1$ . Donc l'intégrale  $\int_0^1 f(t) dt$  converge et  $\int_0^1 f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -1$ .

16.  $f : t \mapsto \frac{\ln t}{\ln(t+1)}$  est cpm sur  $]0, 1]$  et  $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{\ln t}{t}$  donc  $tf(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} -\infty$  i-e  $\frac{1}{t} \underset{0^+}{=} o(f(t))$ . Comme  $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$  diverge (intégrale de Riemann  $\alpha = 1$ ) alors l'intégrale  $\int_0^1 f(t) dt$  diverge.

17.  $f : t \mapsto \exp\left(-\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)\right)$  est cpm sur  $]0, +\infty[$  et

- au voisinage de  $0^+$  :  $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} 0$  donc  $f$  est prolongeable par continuité en 0.
- au voisinage de  $+\infty$  :

$$t^2 f(t) = \underbrace{t^2 e^{-t^2}}_{\rightarrow 0} e^{-1/t^2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\quad} 0.$$

donc  $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  converge (intégrale de Riemann  $\alpha = 2 > 1$ ).

D'où l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge.

18.  $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t-1}$  est cpm sur  $]1, e]$  et  $f(t) \underset{t=1+h}{=} \frac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow[h \rightarrow 0^+]{\quad} 1$ . Donc  $f$  est prolongeable par continuité en 0 et l'intégrale  $\int_1^e f(t) dt$  converge.

19.  $f : t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$  est cpm sur  $[0, 1[$  et  $f(t) \underset{1^-}{\sim} \frac{1/2}{1-t}$ . Comme  $\int_0^1 \frac{dt}{1-t}$  diverge alors l'intégrale  $\int_0^1 f(t) dt$  diverge.

20.  $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t^3-1}$  est cpm sur  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ .

- au voisinage de  $0^+$  :  $\sqrt{t}f(t) \underset{0^+}{\sim} -\sqrt{t}\ln t \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} 0$  donc  $f(t) \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$  et  $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$  converge (intégrale de Riemann  $\alpha = 1/2 < 1$ ).
- au voisinage de 1 :  $f(t) \underset{1}{\sim} \frac{\ln t}{3(t-1)} \xrightarrow[t \rightarrow 1]{\quad} \frac{1}{3}$  donc  $f$  est prolongeable par continuité en 1.
- au voisinage de  $+\infty$  :

$$t^2 f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\quad} 0.$$

donc  $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$  converge (intégrale de Riemann  $\alpha = 2 > 1$ ).

D'où l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge.

**Corrigé de l'exercice 2.** 1.  $f : t \mapsto \frac{\arctan t}{t^\alpha}$  est cpm et positive sur  $]0, +\infty[$  et

- au voisinage de 0 :  $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}$  et  $\int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha-1}}$  converge ssi  $\alpha < 2$ .
- au voisinage de  $+\infty$  :  $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t^\alpha}$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  converge ssi  $\alpha > 1$ .

D'où  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge ssi  $1 < \alpha < 2$ .

2.  $f : t \mapsto \frac{1 - \tanh t}{t^\alpha}$  est cpm et positive sur  $]0, +\infty[$  et

- au voisinage de 0 :  $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$  et  $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$  converge ssi  $\alpha < 1$ .
- au voisinage de  $+\infty$  :  $f(t) = \frac{2e^{-2t}}{(1+e^{-2t})t^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2e^{-2t}}{t^\alpha}$  et  $e^t f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  donc  $f(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$ . Comme  $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$  converge alors  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  converge.

D'où  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  converge ssi  $\alpha < 1$ .

**Corrigé de l'exercice 3.** 1.  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)} = \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \left[ \ln \left( \frac{t}{t+1} \right) \right]_1^{+\infty} = \ln 2$ .

2. Puisque  $t \mapsto tf(t)$  admet une limite finie en 0 et en  $+\infty$ , alors par une intégration par parties on a

$$\int_0^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) dt = \underbrace{\left[ t \ln \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \left[ \arctan t \right]_0^{+\infty} = \pi.$$

3.  $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt \underset{\sqrt{t}=s}{=} 2 \int_0^{+\infty} s e^{-s} ds = 2 \left[ -s e^{-s} \right]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} e^{-s} ds = 2 \left[ -e^{-s} \right]_0^{+\infty} = 2$ .

**Corrigé de l'exercice 4.** 1.  $f_n : t \mapsto t^n e^{-t}$  est continue et positive sur  $[0, +\infty[$  et  $t^2 f_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ . Donc  $f_n$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

Pour  $n \geq 1$ , la fonction  $t \mapsto -e^{-t} t^n$  admet une limite finie en  $+\infty$  donc

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \underbrace{\left[ -t^n e^{-t} \right]_0^{+\infty}}_{=0} - \underbrace{\int_0^{+\infty} n t^{n-1} (-e^{-t}) dt}_{=-n I_{n-1}} = n I_{n-1}.$$

D'où  $I_n = n! I_0 = n! \left[ -e^{-t} \right]_0^{+\infty} = n!$ .

2.  $f_n : t \mapsto |\ln t|^n$  est continue et positive sur  $]0, 1]$  et  $\sqrt{t} f_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$ . Donc  $f_n$  est intégrable sur  $]0, 1]$ .

Pour  $n \geq 1$ , la fonction  $t \mapsto t |\ln t|^n$  admet une limite finie en  $0^+$  donc

$$I_n = \int_0^1 |\ln t|^n dt = (-1)^n \int_0^1 \ln^n t dt = (-1)^n \underbrace{\left[ t \ln^n t \right]_0^1}_{=0} + n (-1)^{n-1} \underbrace{\int_0^1 (\ln t)^{n-1} dt}_{=I_{n-1}}.$$

Donc  $I_n = n I_{n-1}$ . Soit  $I_n = n! I_1 = n!$  car  $I_1 = 1$ .

3.  $f_{p,q} : t \mapsto t^p (\ln t)^q$  est continue sur  $]0, 1]$ .

- Si  $q = 0$  alors  $f_{p,q}$  est intégrable sur  $]0, 1]$  car  $-p < 1$ .
- Si  $q \in \mathbb{N}^*$  alors pour  $\alpha = \frac{1-p}{2} \in ]-p, 1[$  on a  $f_{p,q}(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$  donc  $f_{p,q}$  est intégrable sur  $]0, 1]$ .

Par une intégration par parties successives on obtient

$$\int_0^1 f_{p,q}(t) dt = \int_0^1 t^p (\ln t)^q dt = \underbrace{\left[ \frac{t^{p+1}}{p+1} (\ln t)^q \right]_0^1}_{=0} - \frac{q}{p+1} \int_0^1 t^p (\ln t)^{q-1} dt = (-1)^2 \frac{q(q-1)}{(p+1)^2} \int_0^1 t^p (\ln t)^{q-2} dt.$$

En répétant les intégrations par parties jusqu'à disparition du facteur  $\ln t$ , on obtient  $\int_0^1 t^p (\ln t)^q dt = (-1)^q \frac{q!}{(p+1)^{q+1}}$ .

**Corrigé de l'exercice 5.** 1. Soit  $n \in \mathbb{N}^* 0$ .  $f_n : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$  est cpm sur  $[0, +\infty[$  et  $f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$ . Comme  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2n}}$  converge ( $2n > 1$ ) alors l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$  converge.

2. Soit  $X > 0$ . On a

$$\int_0^X \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \left[ \frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^X + \int_0^X \frac{2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \frac{X}{(1+X^2)^n} + 2n \left( \int_0^X \frac{dt}{(1+t^2)^n} - \int_0^X \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} \right).$$

Lorsque  $X$  tend vers  $+\infty$ , toutes les limites existent, et on obtient  $I_n = 2n(I_n - I_{n+1})$  soit  $I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n$ . Donc

$$I_n = I_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2} I_1.$$

Or  $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ . D'où  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2}$ .

**Corrigé de l'exercice 6. 1.** Soit  $f : [0, +\infty[ \mapsto \mathbb{C}$  définie par  $f(t) = e^{\lambda t}$  avec  $\lambda = -\alpha + i\omega$ . On a

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \left[ \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} \right]_0^x = \frac{e^{\lambda x} - 1}{\lambda}.$$

Puisque  $e^{\lambda x} = \underbrace{e^{i\omega x}}_{\text{bornée}} e^{-\alpha x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , on en déduit que  $\int_0^{+\infty} f(t)dt$  converge et vaut  $\frac{-1}{\lambda}$ .

La partie réelle et la partie imaginaire de cette intégrale sont donc aussi convergentes ce qui assure l'existence des intégrales définissant  $C(\alpha, \omega)$  et  $S(\alpha, \omega)$ . D'où :

$$C(\alpha, \omega) = \operatorname{Re} \left( \frac{-1}{\lambda} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{\alpha + i\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad \text{et} \quad S(\alpha, \omega) = \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

2.  $f : t \mapsto \frac{1}{t^2 + 2\alpha t + \beta}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$  car le discriminant  $\Delta = 4(\alpha^2 - \beta) < 0$ . On a :  $f(t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$  donc  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . De plus

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2\alpha t + \beta} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t + \alpha)^2 + \beta - \alpha^2} dt \\ &\underset{s=t+\alpha}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s^2 + \beta - \alpha^2} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} \left[ \arctan \left( \frac{s}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{\beta - \alpha^2}}. \end{aligned}$$

**Corrigé de l'exercice 7. 1.** On a  $\frac{1}{e^t - 1} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t}$  et  $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$  diverge donc par intégration des relations de comparaison

$$\int_x^1 \frac{1}{e^t - 1} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{t} dt = -\ln x.$$

2. On a  $\frac{1}{t^3 + 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$  converge donc par intégration des relations de comparaison

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^4 + 1} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{2x^2}.$$

3. On a  $\frac{\arctan t}{t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t}$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$  diverge donc par intégration des relations de comparaison

$$\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^x \frac{\pi}{2t} dt = \frac{\pi}{2} \ln x.$$

4.  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$  est continue, positive sur  $[1, +\infty[$  et  $t^2 \frac{e^{-t}}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  donc  $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ . Par une intégration par parties

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt.$$

Or  $\frac{e^{-t}}{t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{e^{-t}}{t}\right)$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$  converge. Par intégration des relations de comparaison

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt\right).$$

D'où  $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$ .

**Corrigé de l'exercice 8. 1.** La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  répond à la question.

2. On considère la fonction  $f$ , définie, continue et affine par morceaux sur  $[1, +\infty[ : \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$f\left(n - \frac{1}{2n}\right) = f\left(n + \frac{1}{2n}\right) = 0, \quad f(n) = n \quad \text{et nulle ailleurs.}$$

On a  $\int_k^{k+1} f(t)dt = \frac{1}{2} \left( \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} \right) = \frac{3k+1}{2^{k+2}}$  donc

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{3k+1}{2^{k+2}} \in \mathbb{R}.$$

Donc  $f$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  mais  $f(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $f$  n'a pas de limite nulle en  $+\infty$ .

**Corrigé de l'exercice 9. 1.**  $f : t \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$  est définie et cpm sur  $]0, +\infty[$  et

- au voisinage de  $0^+$  :

$$f(t) \underset{0}{=} \frac{1 - at - 1 + bt + o(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} b - a.$$

Donc  $f$  est prolongeable par continuité en 0.

- au voisinage de  $+\infty$  :  $t^2 f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  donc  $f$  intégrable au voisinage de  $+\infty$ .

D'où l'existence de l'intégrale  $I$ .

2. Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $a > 0$ , la fonction  $t \mapsto \frac{e^{-at}}{t}$  est intégrable sur  $[\varepsilon, +\infty[$  donc on peut écrire :

$$I = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-bt}}{t} dt \underset{at=s, bt=s}{=} \int_{a\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds - \int_{b\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-s}}{s} ds.$$

3. On a  $\frac{e^{-t}-1}{t} \underset{0}{=} \frac{-t+o(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} -1$  donc  $f$  est prolongeable par continuité en 0. Notons encore  $f$  le prolongement de  $f$  obtenu en posant  $f(0) = -1$ , qui est donc continu sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $F$  la primitive de  $f$  qui s'annule en 0. On a

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-t}-1}{t} dt = F(b\varepsilon) - F(a\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +\infty} F(0) - F(0) = 0.$$

Car  $F$  est continue en 0. Donc

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-t}-1}{t} dt}_{=0} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{dt}{t}.$$

D'où  $I = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ .

$$4. \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt \underset{\ln t=s}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t} dt = \ln 2.$$

**Corrigé de l'exercice 10. 1.**  $f : t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$  est continue sur  $[2, +\infty[$  et

$$F(x) = \int_2^x f(t)dt = \begin{cases} \left[ \frac{1}{1-\beta} (\ln t)^{1-\beta} \right]_2^x & \text{si } \beta \neq 1 \\ \left[ \ln(\ln t) \right]_2^x & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\beta} \left( (\ln x)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta} \right) & \text{si } \beta \neq 1 \\ \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

donc  $F(x)$  admet une limite finie ssi  $\beta > 1$ .

D'où l'intégrale  $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}$  converge ssi  $\beta > 1$ .

On peut aussi utiliser le changement de variable  $x = \ln t$ . Ainsi  $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta}$  converge ssi  $\beta > 1$ .

2. Supposons  $\alpha < 1$ . On a  $tf(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{(\ln t)^\beta} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ . Ainsi, pour  $t$  assez grand,  $f(t) \geq \frac{1}{t}$  donc  $\frac{1}{t} \underset{+\infty}{=} O(f(t))$ .

Comme  $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t}$  diverge alors l'intégrale  $\int_2^{+\infty} f(t)dt$  diverge.

3. Supposons  $\alpha > 1$ . Soit  $\alpha' \in \mathbb{R}$  tel que  $1 < \alpha' < \alpha$ . On a

$$\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^{\alpha'}} \underbrace{\frac{1}{t^{\alpha-\alpha'} (\ln t)^\beta}}_{\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\alpha'}}\right).$$

Donc il suffit de prendre  $\gamma = \alpha' = \frac{1+\alpha}{2} > 1$ . Ainsi  $f(t) = o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$ .

Comme  $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$  converge, l'intégrale  $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$  converge.

4. D'après ce qui précède

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \text{ converge} \iff \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}.$$

5.  $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$  est cpm sur  $]0, 1/2]$ . Par le changement de variable  $s = \frac{1}{t}$ , on a

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta} = \int_2^{+\infty} \frac{s^\alpha}{|\ln(1/s)|^\beta} \frac{1}{s^2} ds = \int_2^{+\infty} \frac{ds}{s^{2-\alpha} |\ln s|^\beta} = \int_2^{+\infty} \frac{ds}{s^{2-\alpha} (\ln s)^\beta}.$$

donc  $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$  converge ssi  $\int_2^{+\infty} \frac{ds}{s^{2-\alpha} (\ln s)^\beta}$  converge. D'où

$$\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta} \text{ converge ssi } (\alpha < 1) \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).$$

**Corrigé de l'exercice 11.** 1.  $f : t \mapsto \ln(\sin t)$  est cpm sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$  et

$$\sqrt{t}f(t) = \sqrt{t} \ln\left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) = \sqrt{t} \left(\ln t + \ln\left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right)\right) = \sqrt{t} \left(\ln t - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0.$$

Donc l'intégrale  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$  converge.

Par le changement de variable  $t = \frac{\pi}{2} - x$ , on a  $I = J$  donc l'intégrale définissant  $J$  converge aussi.

2. On a

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) + \ln(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2} \sin(2t)\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt - \frac{\pi \ln 2}{2}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt & \underset{s=2t}{=} \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln(\sin s) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin s) ds + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \ln(\sin s) ds \\ & \underset{s=t+\pi/2}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin s) ds + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt \\ &= \frac{1}{2}(I + J). \end{aligned}$$

Donc  $I + J = \frac{1}{2}(I + J) - \frac{\pi \ln 2}{2}$ . D'où  $I = J = -\frac{\pi \ln 2}{2}$ .

3. On a

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan t} dt & \underset{u=\pi/2-t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - u\right) \tan u du \\ &= \left[-\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \ln(\cos u)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos u) du. \end{aligned}$$

Or  $\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \ln(\cos u) \underset{h=\pi/2-u}{=} h \ln(\sin h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$ . D'où  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan t} dt = -J = \frac{\pi \ln 2}{2}$ .

**Corrigé de l'exercice 12.** 1. Soit  $a > 0$ .

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln a - \ln u}{1 + u^2} du \\ &= \frac{\ln a}{a} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2} - \frac{1}{a} I(1) \\ &= \frac{\pi \ln a}{2a} - \frac{I(1)}{a} \end{aligned}$$

Pour  $a = 1$  on obtient  $I(1) = 0$ . D'où  $I(a) = \frac{\pi \ln a}{2a}$ .

2. Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^a)} \\ \stackrel{u=1/t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u^2)(1+u^a)} du.$$

$$\text{Donc } 2I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^a}{(1+t^2)(1+t^a)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}. \text{ D'où } I(a) = \frac{\pi}{4}.$$

3. Soit  $a < b$ .

$$I(a, b) = \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} \\ \stackrel{u=(a+b)/2-t}{=} \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} \frac{du}{\sqrt{((b-a)/2-u)((b-a)/2+u)}} \\ \stackrel{s=2u/(b-a)}{=} \int_{-1}^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \\ = [\arcsin s]_{-1}^1 = \pi.$$

**Corrigé de l'exercice 13.** 1. Par une intégration par parties on a :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[ \frac{-\cos t}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

- La fonction  $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$  et prolongeable par continuité en 0 car  $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 1$  donc l'intégrale  $\int_0^1 f(t) dt$  converge.
- La fonction  $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  car  $\left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \stackrel{+}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ . De plus,  $\frac{\cos x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  donc l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  converge.

D'où l'intégrale de Dirichlet  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  converge.

2. Pour tout  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt &= \sum_{k=1}^n \left( \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \right) && \text{relation de Chasles} \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \int_0^\pi \frac{\sin t}{t + (k-1)\pi} dt \right) && t \mapsto |\sin t| \text{ est } \pi\text{-périodique} \\ &\geq \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \sin t dt \right) && t + (k-1)\pi \leq k\pi \text{ pour } t \in [0, \pi] \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k\pi} [-\cos t]_0^\pi \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty && \text{somme partielle de la série harmonique} \end{aligned}$$

D'où l'intégrale de Dirichlet  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  ne converge pas absolument.

**Corrigé de l'exercice 14.** Par une intégration par parties on a

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{+\infty} t^{n+2} e^{-t^2} dt \\ &= -\frac{1}{2} \underbrace{\left[ t^{n+1} e^{-t^2} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{n+1}{2} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt \\ &= \frac{n+1}{2} I_n. \end{aligned}$$

Ainsi  $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$ . Notons que  $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  (intégrale de Gauss).

- Si  $n = 2p \in \mathbb{N}^*$  alors  $I_{2p} = \frac{2p-1}{2} I_{2p-2}$  donc

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots\times 1}{2\times 2\times\dots\times 2} I_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}p!} \sqrt{\pi}.$$

- Si  $n = 2p + 1$  alors  $I_{2p+1} = pI_{2p-1}$  donc

$$I_{2p+1} = p \times (p-1) \dots \times 1 \times I_1 = \frac{p!}{2}. \quad (I_1 = \frac{1}{2})$$