

Intégrales généralisées (rappel MPSI)

Binyze Mohamed

MP 2025-2026

Sommaire

1	Intégrales généralisées	1
2	Intégrabilité	3
3	Calcul d'intégrales généralisées	5
4	Une sélection d'exercices	5

Dans ce chapitre et sauf mentionné, la notation $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I, J des intervalles non vides de $\mathbb{R}$.

1 Intégrales généralisées

Intégration sur $[a, b[$

Soit a un réel et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $a < b$.

Définition 1.1.

intégration sur $[a, b[$

On dit que l'intégrale d'une fonction $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ cpm **converge** si *l'intégrale partielle* $I(x) = \int_a^x f(t)dt$

définie pour $x \in [a, b[$ admet une limite finie quand $x \rightarrow b^-$. Dans ce cas, $\int_{[a,b[} f(t)dt \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt$.

Sinon, on dit que l'intégrale $\int_{[a,b[} f(t)dt$ **diverge**.

Théorème 1.1.

cas des fonctions continues

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue de primitive F . L'intégrale $\int_{[a,b[} f(t)dt$ converge si, et seulement si,

$F(x)$ admet une limite finie quand $x \rightarrow b^-$. Dans ce cas, $\int_{[a,b[} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b$.

Théorème 1.2.

linéarité

Soient $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ cpm et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\int_{[a,b[} f(t)dt$ et $\int_{[a,b[} g(t)dt$ convergent, alors $\int_{[a,b[} (f(t) + \lambda.g(t))dt$

converge aussi. De plus $\int_{[a,b[} (f(t) + \lambda.g(t))dt = \int_{[a,b[} f(t)dt + \lambda \int_{[a,b[} g(t)dt$.

Théorème 1.3.**cas complexe**Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ cpm.

1. Si $\int_{[a,b[} f(t)dt$ converge, alors $\int_{[a,b[} \overline{f(t)}dt$ converge aussi et $\int_{[a,b[} \overline{f(t)}dt = \overline{\int_{[a,b[} f(t)dt}$.
2. $\int_{[a,b[} f(t)dt$ converge si, et seulement si, $\int_{[a,b[} \operatorname{Re} f(t)dt$ et $\int_{[a,b[} \operatorname{Im} f(t)dt$ convergent. Dans ce cas,

$$\int_{[a,b[} f(t)dt = \int_{[a,b[} \operatorname{Re}(f(t))dt + i \int_{[a,b[} \operatorname{Im}(f(t))dt.$$

Proposition 1.1.**croissance**Soient f et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ cpm telles que $\int_{[a,b[} f(t)dt$ et $\int_{[a,b[} g(t)dt$ convergent.

1. $f \leq g \implies \int_{[a,b[} f(t)dt \leq \int_{[a,b[} g(t)dt.$
2. $f \geq 0 \implies \int_{[a,b[} f(t)dt \geq 0.$

Proposition 1.2.**stricte positivité**Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue positive telle que $\int_{[a,b[} f(t)dt$ converge. $\int_{[a,b[} f(t)dt = 0 \implies f$ nulle sur $[a, b[$.**Intégration sur $]a, b]$ ou sur $]a, b[$** Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.**Définition 1.2.****intégration sur $]a, b]$**

On dit que l'intégrale d'une fonction $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ cpm **converge** si *l'intégrale partielle* $I(x) = \int_x^b f(t)dt$ définie pour $x \in]a, b]$ admet une limite finie quand $x \rightarrow a^+$. Dans ce cas, $\int_{]a,b]} f(t)dt \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t)dt$.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.**Définition 1.3.****intégration sur $]a, b[$**

On dit que l'intégrale d'une fonction $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ cpm **converge** si, pour tout réel c dans $]a, b[$, les intégrales $\int_{]a,c]} f(t)dt$ et $\int_{[c,b[} f(t)dt$ convergent. Dans ce cas, $\int_{]a,b[} f(t)dt \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{]a,c]} f(t)dt + \int_{[c,b[} f(t)dt$.

Remarque 1.1. ■ Les résultats précédemment énoncés pour les intégrales sur $[a, b[$ se transposent aux intégrales sur $]a, b]$ et sur $]a, b[$.

Proposition 1.3.**intégration entre deux bornes finies**Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ cpm. Les intégrales $\int_{]a,b]} f(t)dt$, $\int_{[a,b[} f(t)dt$ et $\int_{[a,b]} f(t)dt$ convergent. De plus

$$\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_{]a,b]} f(t)dt = \int_{[a,b[} f(t)dt = \int_{[a,b]} f(t)dt.$$

Remarque 1.2 (Erreur fréquente).

■ Si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est cpm telle que $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **n'est pas forcément** convergente.

Définition 1.4.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ cpm telle que $\int_I f(t)dt$ converge.

Si $a \leq b$ désignent les extrémités de I dans $\overline{\mathbb{R}}$, on pose $\int_a^b f(t)dt = \int_I f(t)dt$ et $\int_b^a f(t)dt = -\int_I f(t)dt$.

Théorème 1.4.**relation de Chasles**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ cpm. Si $\int_I f(t)dt$ converge alors, pour tous a, b, c points de I ou extrémités éventuellement infinies de I , les intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent et $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

Intégrales de référence**Proposition 1.4.****fonction exponentielle**

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge $\iff \lambda > 0$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge $\iff \operatorname{Re}(\lambda) > 0$.

Théorème 1.5.**intégrales de Riemann**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha < 1$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$.

Remarque 1.3. ■ $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ et $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ convergent si, et seulement si, $\alpha < 1$.

2 Intégrabilité

Les résultats qui suivent sont présentés pour l'étude de la convergence de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a, b[$. Il peuvent aisément se transposer aux intégrales sur $]a, b]$ ou sur $]a, b[$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.

Théorème 2.1.**intégrale d'une fonction positive**

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ cpm et **positive**. $\int_a^b f(t)dt$ converge $\iff \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [a, b[, \int_a^x f(t)dt \leq M$.

En revanche, si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt = +\infty$.

Théorème 2.2.**comparaison**

Soit $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ cpm et **positives**.

1. $\left\{ \begin{array}{l} f \leq g \\ \int_a^b g(t)dt \text{ converge} \end{array} \right\} \implies \int_a^b f(t)dt \text{ converge}$
2. $\left\{ \begin{array}{l} f = O(g) \\ \int_a^b g(t)dt \text{ converge} \end{array} \right\} \implies \int_a^b f(t)dt \text{ converge}$
3. $\left\{ \begin{array}{l} f = o(g) \\ \int_a^b g(t)dt \text{ converge} \end{array} \right\} \implies \int_a^b f(t)dt \text{ converge}$
4. $f \underset{b^-}{\sim} g \implies \int_a^b f(t)dt \text{ et } \int_a^b g(t)dt \text{ sont de même nature.}$

Remarque 2.1. ■ Si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est cpm et $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}^* \cup \{+\infty\}$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Proposition 2.1.**comparaison aux intégrales de Riemann**

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ cpm et **positive**.

a. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.

b. S'il existe $\alpha \leq 1$ et $\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ tel que $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \ell$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f :]0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ cpm et **positive**.

a. S'il existe $\alpha < 1$ tel que $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$, alors $\int_0^a f(t)dt$ converge.

b. S'il existe $\alpha \geq 1$ et $\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ tel que $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} \ell$, alors $\int_0^a f(t)dt$ diverge.

Théorème 2.3.**comparaison série-intégrale**

Soit f une fonction cpm, **positive et décroissante** sur $[n_0, +\infty[$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt \text{ converge} \iff \sum_{n \geq n_0} f(n) \text{ converge.}$$

Définition 2.1.**fonction intégrable**

On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ cpm est **intégrable** ou l'intégrale $\int_I f(t)dt$ **converge absolument** lorsque l'intégrale $\int_I |f(t)|dt$ converge.

Théorème 2.4.**fonction intégrable vs convergence de son intégrale**

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est cpm et intégrable sur I alors¹ l'intégrale $\int_I f(t)dt$ converge et $\left| \int_I f(t)dt \right| \leq \int_I |f(t)|dt$.

1. La réciproque est fausse.

Théorème 2.5.**domination**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ cpm. $\left[\forall t \in I, |f(t)| \leq \varphi(t) \text{ et } \varphi \text{ intégrable sur } I \implies f \text{ intégrable sur } I \right]$.

Théorème 2.6.**inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ cpm de **carrés intégrables** i.e. f^2 et g^2 sont intégrables.

$$\left| \int_I |f(t)\overline{g(t)}|dt \right| \leq \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt} \sqrt{\int_I |\overline{g(t)}|^2 dt}.$$

Théorème 2.7.**intégration des relations de comparaison**

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$, $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions cpm.

1. On suppose g **positive** et intégrable sur $[a, b[$.

a. $f \underset{b^-}{=} O(g) \implies f$ intégrable sur $[a, b[$ et $\int_x^b f \underset{x \rightarrow b^-}{=} O\left(\int_x^b g\right)$.

b. $f \underset{b^-}{=} o(g) \implies f$ intégrable sur $[a, b[$ et $\int_x^b f \underset{x \rightarrow b^-}{=} o\left(\int_x^b g\right)$.

c. $f \underset{b^-}{\sim} g \implies f$ intégrable sur $[a, b[$ et $\int_x^b f \underset{x \rightarrow b^-}{\sim} \int_x^b g$.

2. On suppose g **positive** et non intégrable sur $[a, b[$.

a. $f \underset{b^-}{=} O(g) \implies \int_a^x f \underset{x \rightarrow b^-}{=} O\left(\int_a^x g\right)$.

b. $f \underset{b^-}{=} o(g) \implies \int_a^x f \underset{x \rightarrow b^-}{=} o\left(\int_a^x g\right)$.

c. $f \underset{b^-}{\sim} g \implies \int_a^x f \underset{x \rightarrow b^-}{\sim} \int_a^x g$.

3 Calcul d'intégrales généralisées

Théorème 3.1.

changement de variable généralisé

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue et $\varphi : J \rightarrow I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$.

$\int_I f(t)dt$ converge si, et seulement si, $\int_J f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt$ converge.

Dans ce cas, $\boxed{\int_I f(t)dt = \int_J f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt}$.

Remarque 3.1. ■ f intégrable sur I si, et seulement si, $f \circ \varphi \times |\varphi'|$ intégrable sur J .

Théorème 3.2.

intégration par parties généralisée

Soit $u, v : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que le produit uv admet une limite finie en les extrémités ouvertes a et b de I , avec $a < b$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$\int_I u'(t)v(t)dt$ converge si, et seulement si, $\int_I u(t)v'(t)dt$ converge.

Dans ce cas, $\boxed{\int_I u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_I u(t)v'(t)dt}$.

4 Une sélection d'exercices

Exercice 4.1 : Déterminer la nature des intégrales suivantes :

- | | | | |
|--|--|--|---|
| 1. $\int_0^{+\infty} \frac{t+1}{t^4+1} dt.$ | 6. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t(t+1)} dt.$ | 11. $\int_0^1 \frac{1}{e^t-1} dt.$ | 16. $\int_0^1 \frac{\ln t}{\ln(t+1)} dt.$ |
| 2. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t} dt.$ | 7. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t+1} dt.$ | 12. $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt.$ | 17. $\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)\right) dt.$ |
| 3. $\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^2+1} dt.$ | 8. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt.$ | 13. $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt.$ | 18. $\int_1^e \frac{\ln t}{t-1} dt.$ |
| 4. $\int_1^{+\infty} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt.$ | 9. $\int_0^1 \frac{\sqrt{1+t}-1}{t} dt.$ | 14. $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt.$ | 19. $\int_0^1 \frac{1}{1-t^2} dt.$ |
| 5. $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$ | 10. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$ | 15. $\int_0^1 \ln t dt.$ | 20. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^3-1} dt.$ |

Exercice 4.2 : Déterminer la nature des intégrales suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha} dt, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$ | 2. $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \tanh t}{t^\alpha} dt, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$ |
|---|---|

Exercice 4.3 : Calculer les intégrales suivantes :

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)}.$ | 2. $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt.$ | 3. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt.$ |
|--|---|---|

Exercice 4.4 : Calcul à l'aide d'une récurrence.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.
- Montrer que, pour tout $n \geq 1$, la fonction $t \mapsto |\ln t|^n$ est intégrable sur $]0, 1]$ et calculer $\int_0^1 |\ln t|^n dt$.
- Montrer que, pour tout $p > -1$ et $q \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^p (\ln t)^q$ est intégrable sur $]0, 1]$ et calculer $\int_0^1 t^p (\ln t)^q dt$.

Exercice 4.5 : D'après centrale PC. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

- Justifier l'existence de I_n .
- Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} et en déduire la valeur de I_n à l'aide de factorielles.

Exercice 4.6 : 1. Soit $\alpha > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Calculer après avoir vérifié leur convergence : $C(\alpha, \omega) = \int_0^{+\infty} \cos(\omega t) e^{-\alpha t} dt$ et $S(\alpha, \omega) = \int_0^{+\infty} \sin(\omega t) e^{-\alpha t} dt$.

2. Soit p et q deux réels tels que $p^2 < q$. Calculer après avoir vérifié la convergence : $I(p, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2pt + q} dt$.

Exercice 4.7 : Donner un équivalent simple de

1. $\int_x^1 \frac{dt}{e^t - 1}$, $x \rightarrow 0^+$.
2. $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^3 + 1}$, $x \rightarrow +\infty$.
3. $\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt$, $x \rightarrow +\infty$.
4. $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$, $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 4.8 : Deux contres exemples afin d'éviter toute confusion.

1. Donner un exemple d'une fonction continue, positive et de limite nulle en $+\infty$ mais n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$. **Indication :** penser à la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$.

2. Donner un exemple d'une fonction cpm, positive et intégrable au voisinage de $+\infty$ mais n'a pas de limite nulle en $+\infty$. **Indication :** considérons une fonction affine par morceaux sur les intervalles $\left[n - \frac{1}{2n}, n\right]$ et $\left[n, n + \frac{1}{2n}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et nulle ailleurs.

Exercice 4.9 : Soit a et b deux réels > 0 .

1. Démontrer l'existence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$.

2. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

3. Démontrer que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t} - 1}{t}$ peut être prolongée par continuité en 0. En déduire la valeur de I .

4. **Exemple :** Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$. **Indication :** utiliser un changement de variable.

Exercice 4.10 : Intégrales de Bertrand. Soit α et β deux réels. Pour tout $t \geq 2$, on pose $f(t) = \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$.

1. Supposons $\alpha = 1$. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t) dt$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$.

2. Supposons $\alpha < 1$. Montrer $\frac{1}{t} = O(f(t))$. En déduire la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t) dt$.

3. Supposons $\alpha > 1$. Chercher un réel $\gamma > 1$ tel que $f(t) = o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$. En déduire la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t) dt$.

4. En déduire $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge $\iff \alpha > 1$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$.

5. En déduire $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ converge $\iff \alpha < 1$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$. **Indication :** utiliser un changement de variable.

Exercice 4.11 : Intégrales d'Euler. On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt$.

1. Montrer que les intégrales I et J sont bien définies et égales.

2. En étudiant $I + J$, calculer I et J .

3. **Exemple :** Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan t} dt$. **Indication :** utiliser le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$.

Exercice 4.12 : Calculer, à l'aide d'un changement de variable, les intégrales suivantes :

1. $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt$, $a > 0$.
2. $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^a)}$, $a \in \mathbb{R}$.
3. $I(a, b) = \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}$, $a < b$.

Exercice 4.13 : Intégrale de Dirichlet : une intégrale convergente mais ne converge pas absolument.

1. Soit $x > 1$. Montrer $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \cos x - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer $\int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ ne converge pas absolument.

Exercice 4.14 : Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$. **Indication :** on donne $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.