

TD N°12

Calcul différentiel et optimisation (correction)

1 Différentiabilité et classe d'une fonction

Corrigé de l'exercice 1. 1. Par théorèmes généraux, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. En passant en coordonnées polaires, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, on obtient

$$|f(r \cos \theta, r \sin \theta)| = r |\cos^3 \theta - \sin^3 \theta| \leq 2r.$$

Donc $|f(x, y)| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = f(0,0)$, ce qui montre la continuité de f en $(0,0)$.

2. Par théorèmes généraux, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - 2x(x^3 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

On remarque que $f(y, x) = -f(x, y)$ pour tout $(x, y) \neq (0,0)$ et donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x) = -\frac{y^4 + 3x^2y^2 + 2yx^3}{(x^2 + y^2)^2}$.

3. Par définition, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x}}_{=1} = 1$. Puisque $f(y, x) = -f(x, y)$ pour tout $(x, y) \neq (0,0)$, on a de même

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1.$$

4. La fonction $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ n'est pas continue en $(0,0)$ car $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2}$ ne tend pas vers $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Donc f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

5. Supposons f différentiable au point $(0,0)$. Alors f admet un développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$:

$$f(x, y) = f(0,0) + x \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + o(\|(x, y)\|_2).$$

Mais $\Delta(x, y) = f(x, y) - f(0,0) - x \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - y \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - x + y = \frac{yx^2 - xy^2}{x^2 + y^2}$. En passant en coordonnées polaires, on obtient $\frac{\Delta(r \cos \theta, r \sin \theta)}{r} = \frac{\sin(2\theta)}{2}(\cos \theta - \sin \theta)$. Cette expression est indépendante de r , et n'est pas nulle, donc ne tend pas vers 0 quand r tend vers 0. Il en résulte que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Corrigé de l'exercice 2. 1. f est bien définie sur $\mathbb{R}^2$ puisque $x^4 - 2x^2y + 3y^2 = (x^2 - y)^2 + 2y^2$ ne s'annule qu'en $(0,0)$. La restriction de f aux droites $x = 0$ et $y = 0$ est la fonction nulle (et est donc continue). La restriction de f à la droite $y = mx$ avec $m \neq 0$, est, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x, mx) = \frac{mx}{x^4 - 2mx + 3m^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f(0,0)$. D'où la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue.

2. On a $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers $f(0,0) = 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Donc f n'est pas continue à l'origine.

Corrigé de l'exercice 3.

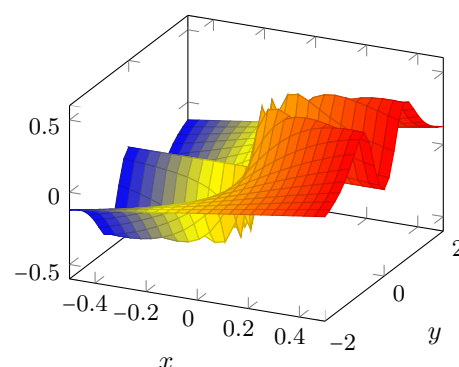
1. Par théorèmes généraux, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Mais $f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers $f(0,0) = 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

2. Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $t \neq 0$. On a

$$\begin{aligned} \frac{f((0,0) + tv) - f(0,0)}{t} &= \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} \\ &= \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{v_2^2}{v_1} & \text{si } v_1 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi, f admet des dérivées dans toutes les directions en $(0,0)$ et

$$D_{(v_1, v_2)} f(0,0) = \begin{cases} \frac{v_2^2}{v_1} & \text{si } v_1 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Tracé de $z = f(x, y)$ 

Corrigé de l'exercice 4.

1. Par théorèmes généraux, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a

$$|f(x,y)| \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2},$$

donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et f est continue en $(0,0)$.

2. Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $t \neq 0$. On a

$$\frac{f((0,0) + tv) - f(0,0)}{t} = \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} = \frac{v_1^3}{v_1^2 + v_2^2}$$

donc

$$D_v f(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + tv) - f(0,0)}{t} = \frac{v_1^3}{v_1^2 + v_2^2} \quad (*).$$

3. Si f est différentiable en $(0,0)$ alors

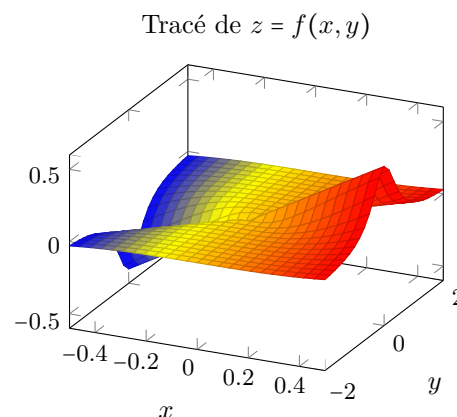
$$D_v f(0,0) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = v_1.$$

Mais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = D_{(1,0)} f(0,0) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = D_{(0,1)} f(0,0) = 0.$$

Par suite, $D_v f(0,0) = v_1$ ce qui contredit (*).

D'où f n'est pas différentiable en $(0,0)$.



Corrigé de l'exercice 5. • Par théorèmes généraux, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$ et donc différentiable. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x,0) + t(1,0)) - f(x,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t,0) - f(x,0)}{t} = 0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x,0) + t(0,1)) - f(x,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x,t) - f(x,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t \sin\left(\frac{x}{t}\right) = 0.$$

Ainsi, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ existent et valent 0. Mais, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $y \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(1, \frac{1}{2\pi n}\right) = -1$$

donc la suite $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\left(1, \frac{1}{2\pi n}\right)\right)_{n \geq 1}$ ne converge pas vers $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$ et f n'est donc pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

• Puisque les dérivées partielles de f en $(a,0)$, $a \in \mathbb{R}$ sont nulles, la différentielle de f est nulle. Il faut donc montrer que $f(x,y) \underset{(x,y) \rightarrow (a,0)}{=} o(\|(x,y)\|_2)$.

Si $a \neq 0$, alors $|f(x,y)| = \left|y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leq |y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (a,0)} 0$ donc $\frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|_2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (a,0)} 0$.

Si $a = 0$, alors

$$\frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|_2} = \frac{y^2 \left|\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0.$$

car $|\sin t| \leq |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ qui vient du fait que $\sin$ est 1-lipschitzienne. Donc f est différentiable en $(a,0)$, $a \in \mathbb{R}$, de différentielle nulle. Finalement, f est différentiable en sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé de l'exercice 6. 1. Par théorèmes généraux, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Posons $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, donc

$$|f(r \cos \theta, r \sin \theta)| = \frac{r^2}{4} |\cos(4\theta)| \leq \frac{r^2}{4}.$$

Donc $|f(x,y)| \leq \frac{1}{4}(x^2 + y^2) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = f(0,0)$ et f est continue en $(0,0)$. D'où f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ existent et sont continue. De plus

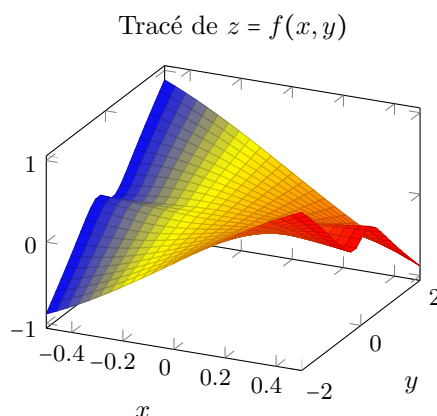
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

3. En $(0, 0)$, on a $\frac{1}{t}(f(t, 0) - f(0, 0)) \xrightarrow[t \neq 0]{t \rightarrow 0} 0$ et $\frac{1}{t}(f(0, t) - f(0, 0)) \xrightarrow[t \neq 0]{t \rightarrow 0} 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

4. On a :

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right| = r |\sin \theta (\cos(2\theta) + 2 \sin(2\theta))| \leq 3r \\ \left| \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right| = r |\cos \theta (\cos(2\theta) + 2 \sin(2\theta))| \leq 3r. \end{cases}$$

Donc $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq 3\sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (0, 0)]{} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq 3\sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow[(x, y) \rightarrow (0, 0)]{} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Donc les dérivées partielles de f sont continues en $(0, 0)$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.



5. Par théorèmes généraux, les dérivées partielles d'ordre 2 de f existent dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. De plus

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{t \neq 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = 1, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{t \neq 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \lim_{t \neq 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = 0, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = \lim_{t \neq 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0, t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = 0. \end{cases}$$

Donc les dérivées partielles d'ordre 2 de f existent dans $\mathbb{R}^2$.

6. D'après le théorème de Schwartz, f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Corrigé de l'exercice 7. Soit $t \in \mathbb{R}$ non nul, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(f(\mathbf{I}_n + t.E_{i,j}) - f(\mathbf{I}_n)) &= \frac{1}{t}(n\mathbf{I}_n + t\text{Tr}(E_{i,j})\mathbf{I}_n - \mathbf{I}_n - 2tE_{i,j} - t^2E_{i,j}^2 - n\mathbf{I}_n + \mathbf{I}_n) \\ &= -tE_{i,j}^2 - 2E_{i,j} + \delta_{i,j}\mathbf{I}_n \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} -2E_{i,j} + \delta_{i,j}\mathbf{I}_n. \end{aligned}$$

Donc $D_v f(a) = -2E_{i,j} + \delta_{i,j}\mathbf{I}_n$.

Corrigé de l'exercice 8.

$$\begin{aligned} D_{i,j} f(M) &= \frac{\partial f}{\partial x_{i,j}}(M) = \lim_{t \neq 0} \frac{1}{t} (f(M + t.E_{i,j}) - f(M)) \\ &= \lim_{t \neq 0} \frac{1}{t} (\text{Tr}(M^\top M + tM^\top E_{i,j} + tE_{i,j}^\top M + t^2E_{i,j}^\top E_{i,j}) - \text{Tr}(M^\top M)) \\ &= \lim_{t \neq 0} (\text{Tr}(M^\top E_{i,j}) + \text{Tr}(E_{i,j}^\top M) + t\text{Tr}(E_{i,j}^\top E_{i,j})) = 2\text{Tr}(M^\top E_{i,j}). \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 9. Soit $H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a

$$f_A(X + H) = (X + H)^\top A(X + H) = X^\top AX + X^\top AH + H^\top AX + H^\top AH = f_A(X) + X^\top AH + H^\top AX + H^\top AH.$$

L'application $H \mapsto X^\top AH + H^\top AX$ est linéaire. De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|H^T AH| = |(H \mid AH)| \leq \|H\|_2 \|AH\|_2 \leq \|A\|_2 \|H\|_2^2$$

donc $H^T AH = o(\|H\|_2)$. Ainsi, f est différentiable sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $df_A(X).H = X^T AH + H^T AX$.

Corrigé de l'exercice 10. 1. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} df_k(I_n).H &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{1}{t} (f_k(I_n + t.H) - f_k(I_n)) \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{1}{t} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} t^i H^i - I_n \right) \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{1}{t} \left(\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} t^i H^i \right) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \left(\binom{k}{1} H + \sum_{i=2}^k t^{i-1} H^i \right) = kH. \end{aligned}$$

2. L'application Tr est linéaire, donc par composition

$$d(\text{Tr} \circ f_k)(I_n).H = (\text{Tr} \circ df_k(I_n)).H = \text{Tr}(df_k(I_n).H) = \text{Tr}(kH) = k\text{Tr}(H).$$

3. Récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : Pour $k = 1$, On a $M + H = M + M^0 H M^{1-0-1} + 0$.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $(M + H)^k \underset{H \rightarrow 0}{=} M^k + \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-i-1} + O(\|H\|^2)$. On a

$$\begin{aligned} (M + H)^{k+1} &= (M + H)(M + H)^k \\ &\underset{H \rightarrow 0}{=} M \left(M^k + \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-i-1} + O(\|H\|^2) \right) + H \left(M^k + \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-i-1} + O(\|H\|^2) \right) \\ &\underset{H \rightarrow 0}{=} M^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} M^{i+1} H M^{k-i-1} + H M^k + \sum_{i=0}^{k-1} H M^i H M^{k-i-1} + O(\|H\|^2) \\ &\underset{H \rightarrow 0}{=} M^{k+1} + \sum_{i=0}^k M^i H M^{k-i} + \sum_{i=0}^{k-1} H M^i H M^{k-i-1} + O(\|H\|^2) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=0}^{k-1} H M^i H M^{k-i-1} \right\| &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \|H M^i H M^{k-i-1}\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \|H\| \|M^i\| \|H\| \|M^{k-i-1}\| \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{k-1} \|M^i\| \|M^{k-i-1}\| \right) \|H\|^2 = O(\|H\|^2). \end{aligned}$$

Donc $(M + H)^{k+1} = M^{k+1} + \sum_{i=0}^k M^i H M^{k-i} + O(\|H\|^2)$.

Conclusion : Par le principe de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(M + H)^k \underset{H \rightarrow 0}{=} M^k + \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-i-1} + O(\|H\|^2)$.

4. On a, $f_k(M + H) \underset{H \rightarrow 0}{=} f_k(M) + \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-i-1} + O(\|H\|^2)$ et l'application $H \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-i-1}$ est linéaire, donc

$df_k(M).H = \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-i-1}$. De plus, par composition,

$$d(\text{Tr} \circ f_k)(M).H = \text{Tr} \left(\sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-i-1} \right) = \sum_{i=0}^{k-1} \text{Tr}(M^i H M^{k-i-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} \text{Tr}(H M^{k-1}) = k \text{Tr}(H M^{k-1}).$$

Corrigé de l'exercice 11. Supposons φ est différentiable en 0. Alors f admet une dérivée en 0 suivant tout vecteur v non nul de E . Soit v un vecteur non nul de E et $t \in \mathbb{R}^*$, alors

$$\frac{\varphi(0 + tv) - \varphi(0)}{t} = \frac{\|tv\|}{t} = \frac{|t|\|v\|}{t} = \begin{cases} \|v\| & \text{si } t > 0 \\ -\|v\| & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(0 + tv) - \varphi(0)}{t} = \|v\| \neq -\|v\| = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(0 + tv) - \varphi(0)}{t}$, donc la limite $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(0 + tv) - \varphi(0)}{t}$ n'existe pas. Ainsi, f n'admet pas une dérivée partielle en 0 selon v , ce qui est absurde.

Corrigé de l'exercice 12. 1. L'application (produit scalaire) $\varphi_1 : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable sur E^2 car bilinéaire et l'application $\varphi_2 : E \longrightarrow E^2$ est différentiable sur E car linéaire, donc par composition, $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ est différentiable sur E et pour tout $(x, h) \in E^2$,

$$\begin{aligned} d\varphi(x).h &= d(\varphi_1 \circ \varphi_2)(x).h = (d\varphi_1(\varphi_2(x)) \circ d\varphi_2(x))(h) \\ &= (d\varphi_1(x, x) \circ \varphi_2)(h) \\ &= d\varphi_1(x, x).(\varphi_2(h)) \\ &= d\varphi_1(x, x).(h, h) = \varphi_1(x, h) + \varphi_1(h, x) = 2(x | h). \end{aligned}$$

2. L'application $\varphi_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, $\psi = \varphi_1 \circ \varphi$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et pour tout $h \in E$,

$$\begin{aligned} d\psi(x).h &= d(\varphi_1 \circ \varphi)(x).h = (d\varphi_1(\varphi(x)) \circ d\varphi(x))(h) \\ &= d\varphi_1(\varphi(x)).(d\varphi(x).h) \\ &= \frac{d\varphi(x).h}{2\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{(x | h)}{\|x\|}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 13. L'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{C}^k$ car linéaire, donc par composition, $g = f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$. En dérivant cette composition selon la règle de la chaîne :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=0} \frac{\partial f}{\partial x}(y, x) + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1} \frac{\partial f}{\partial y}(y, x) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \underbrace{\frac{\partial y}{\partial y}}_{=1} \frac{\partial f}{\partial x}(y, x) + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{=0} \frac{\partial f}{\partial y}(y, x) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x). \end{aligned} \right.$$

Et

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=0} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(y, x) + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y, x) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \underbrace{\frac{\partial y}{\partial y}}_{=1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(y, x) + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{=0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(y, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(y, x) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=0} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(y, x) + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{=1} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(y, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(y, x) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \underbrace{\frac{\partial y}{\partial y}}_{=1} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(y, x) + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{=0} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(y, x). \end{aligned} \right.$$

Corrigé de l'exercice 14. 1. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sorte que $I_n + H \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Ceci est possible puisque $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert et $I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. En effet :

$$\exists r > 0, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|I_n - A\| < r \implies A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Donc il suffit de prendre $\|H\| < r$ pour que $I_n + H \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. L'identité $(I_n + H)(I_n - H) = I_n - H^2$ donne :

$$I_n - H = (I_n + H)^{-1}(I_n - H^2) = (I_n + H)^{-1} - (I_n + H)^{-1}H^2$$

donc $f(I_n + H) = (I_n + H)^{-1} = I_n - H + (I_n + H)^{-1}H^2 = f(I_n) + (-H) + (I_n + H)^{-1}H^2$. L'application $H \mapsto -H$ est linéaire et la matrice $(I_n + H)^{-1}$ est un polynôme en $(I_n + H)$ donc continue en H , par suite, si $\|\cdot\|$ désigne une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\|(I_n + H)^{-1}H^2\| \leq \underbrace{\|(I_n + H)^{-1}H\|}_{\varepsilon(H)} \times \|H\| \quad \text{avec} \quad \lim_{H \rightarrow O_n} \varepsilon(H) = 0.$$

Donc $(I_n + H)^{-1}H^2 \underset{H \rightarrow O_n}{=} o(\|H\|)$. Finalement, f est différentiable en I_n et $df(I_n).H = -H$.

2. Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sorte que $M + H \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} (M + H)^{-1} &= (M(I_n + M^{-1}H))^{-1} = (I_n + M^{-1}H)^{-1} M^{-1} \\ &\underset{H \rightarrow O_n}{=} (I_n - M^{-1}H + o(\|H\|)) M^{-1} \\ &\underset{H \rightarrow O_n}{=} M^{-1} - M^{-1}HM^{-1} + o(\|H\|). \end{aligned}$$

Donc $f(M + H) \underset{H \rightarrow O_n}{=} f(M) + (-M^{-1}HM^{-1}) + o(\|H\|)$. L'application $H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$ est linéaire en H donc f est différentiable en M et $df(M).H = -M^{-1}HM^{-1}$.

Corrigé de l'exercice 15. On a g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), & \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) &= -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) &= -r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - 2r^2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \end{aligned} \right.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) \\ &\quad + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \Delta f(x, y). \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 16.

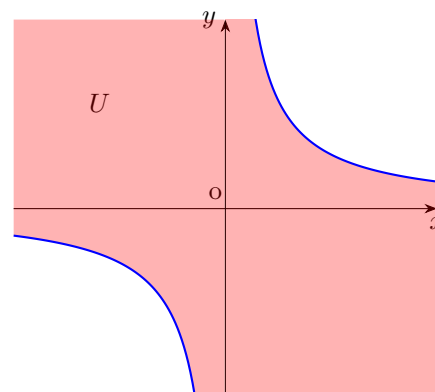
1. On a $U = g^{-1}(]-\infty, 1[)$ où g est la fonction continue définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = xy$. Donc U est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.

2. Pour tout $a \in U$, $[0, a] \subset U$ donc U est étoilé (par rapport à 0) et par suite U est connexe par arcs.

3. f est de classe $\mathcal{C}^1$ comme somme et composée d'applications qui le sont. De plus,

$$\forall (x, y) \in U, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

4. Les dérivées partielles de f sont nulles sur l'ouvert connexe par arcs U donc f est constante sur U . Or $f(0, 0) = 0$ donc f est nulle sur U . D'où pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xy < 1$, $\arctan x + \arctan y = \arctan \left(\frac{x+y}{1-xy} \right)$.



Corrigé de l'exercice 17. 1. Posons $f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\alpha/2}$. Pour $(x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = \left(\sum_{i=1}^n t^2 x_i^2 \right)^{\alpha/2} = t^\alpha \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\alpha/2} = t^\alpha f(x_1, \dots, x_n)$$

donc fonction f est α -homogène.

2. On a $f(0) = f(0, \dots, 0) = f(t \times 0, \dots, t \times 0) = t^\alpha f(0, \dots, 0)$. Pour $t = 1$, on obtient, $f(0) = 0$. D'autre part, en dérivant par rapport à x_i , $1 \leq i \leq n$ les deux membres de la définition α -homogène, on obtient :

$$t \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) = t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) = t^{\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$. Il vient que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est $(\alpha - 1)$ -homogène.

3. a. Soit $t > 0$ fixé. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ comme somme et composée de fonctions qui le sont et, pour $1 \leq i \leq n$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) &= t \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) - t^\alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \\ &= t \left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) - t^{\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)}_{=0} \right) = 0. \end{aligned}$$

Donc $dg(x_1, \dots, x_n) = 0$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Puisque $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs, alors g est constante sur $\mathbb{R}^n$.

b. On a $g(0) = 0$ donc g est la fonction nulle. Par suite, $f(tx_1, \dots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \dots, x_n)$ i-e f est α -homogène.

4. a. En dérivant par rapport à t les deux membres de la définition α -homogène, selon la règle de la chaîne, on obtient :

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(tx_1, \dots, tx_n) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(tx_1, \dots, tx_n) = \alpha t^{\alpha-1} f(x_1, \dots, x_n).$$

En prenant $t = 1$, f satisfait bien l'EDP ($\mathcal{E}$).

b. Par la règle de la chaîne, on a pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(tx_1, \dots, tx_n) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(tx_1, \dots, tx_n) - \alpha t^{\alpha-1} f(x_1, \dots, x_n) \\ &= \frac{1}{t} \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(tx_1, \dots, tx_n) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(tx_1, \dots, tx_n) \right) - \alpha t^{\alpha-1} f(x_1, \dots, x_n) \\ &= \frac{1}{t} \alpha f(tx_1, \dots, tx_n) - \alpha t^{\alpha-1} f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\alpha}{t} g(t). \end{aligned}$$

Donc g est solution de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre $y' = \frac{\alpha}{t}y$. Ainsi, g est de la forme $g(t) = \lambda e^{\alpha \ln t} = \lambda t^\alpha$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $g(1) = 0$, on a $\lambda = 0$ et g est la fonction nulle. Par suite

$$\forall (x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*, \quad f(tx_1, \dots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \dots, x_n).$$

D'où f est α -homogène.

2 Optimisation

Corrigé de l'exercice 18. On a $f(x, y) = xy \leq 1$ pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$ avec égalité en $(x, y) = (1, 1)$ donc f admet un maximum global en $(1, 1)$ mais $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \neq 0$.

Une proposition du cours nous dit que $(1, 1)$ est un point critique de f mais ceci est vrai uniquement lorsque $(1, 1)$ est un point intérieur à $[0, 1]^2$ ou lorsque l'ensemble dans lequel on travaille est un ouvert.

Corrigé de l'exercice 19.

- f est différentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

- Points critiques de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$$

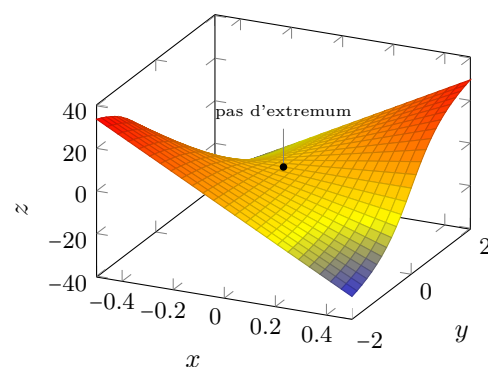
donc $(0, 0)$ est le seul point critique de f .

- Étude du signe de la différence $f(x, y) - f(0, 0)$: on a

$$f\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{-1}{n} < 0 \quad \text{et} \quad f\left(0, \frac{-1}{n}\right) = \frac{1}{n} > 0$$

donc $f(x, y) - f(0, 0)$ n'est pas de signe constant.

On peut conclure que f n'a pas d'extremum local en $(0, 0)$ et donc pas d'extremums du tout.

Tracé de $z = f(x, y)$ 

Corrigé de l'exercice 20.

1. f est différentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ car polynomiale et

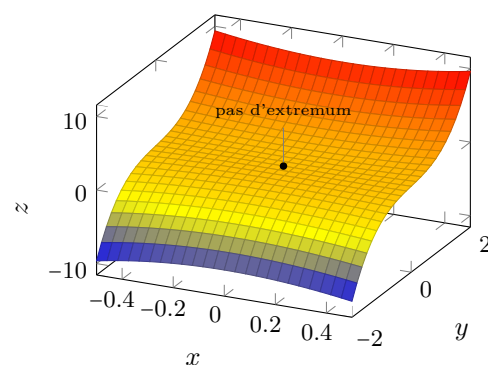
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \iff (x, y) = (0, 0)$$

donc $(0, 0)$ est le seul point critique de f .

2. On a $f\left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{3}{n^3} > 0$ et $f\left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}\right) = \frac{-3}{n^3} < 0$,

donc $f(x, y) - f(0, 0)$ n'est pas de signe constant.

On peut conclure que f n'a pas d'extremum local en $(0, 0)$ et donc pas d'extremums du tout.

Tracé de $z = f(x, y)$ 

Corrigé de l'exercice 21.

- f est différentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ car polynomiale et

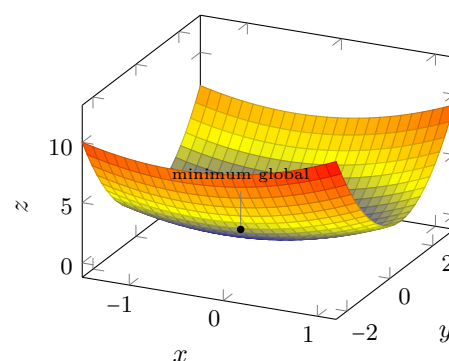
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \iff (x, y) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

donc $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est le seul point critique de f .

- Posons $u = x + \frac{1}{2}$ et $v = y - \frac{1}{2}$. On a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 + u - \frac{1}{2} - v - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= u^2 + v^2. \end{aligned}$$

Donc $f(x, y) - f\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right) = u^2 + v^2 - 0 = u^2 + v^2 \geq 0$. Par suite, f admet un minimum global en $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Tracé de $z = f(x, y)$ 

Corrigé de l'exercice 22. 1. $\mathcal{D}$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon $\sqrt{2}$ pour la norme $\|\cdot\|_2$ donc $\mathcal{D}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. Comme f est continue (car polynomiale) sur $\mathcal{D}$ alors f admet un minimum et un maximum sur $\mathcal{D}$.

2. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_1$ et

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x^3 = x - y \\ y^3 = y - x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ y^3 = y - x \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} x = -y \\ y^3 = 2y \end{cases} \\ &\implies (x, y) \in \{(0, 0), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}. \end{aligned}$$

Mais $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ne sont pas dans $\mathcal{D}_1$. Donc f possède un seul point critique $(0, 0)$ sur $\mathcal{D}_1$.

3. Posons $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$ de sorte que $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = 0\}$. On a g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0) \text{ sur } \mathcal{C}.$$

Ainsi, si (x, y) est un point critique de f sous la contrainte $\mathcal{C}$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$x^2 + y^2 = 2 \text{ et } \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y).$$

On a :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ 4x^3 - 4(x - y) = 2\lambda x \\ 4y^3 + 4(x - y) = 2\lambda y \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow (L_2 - L_3)/2} \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ 2(x^3 - y^3) - 4(x - y) = \lambda(x - y) \\ 2y^3 + 2(x - y) = \lambda y. \end{cases}$$

- Si $x = y$, alors la première équation donne $x^2 = 1$ soit $(x, y) = (1, 1)$ ou $(-1, -1)$. Dans les deux cas, les trois équations sont vérifiées avec $\lambda = 2$.
- Si $x \neq y$, alors la seconde équation devient, $2(x^2 + y^2 + xy) - 4 = \lambda$. Donc $2(2 + xy) - 4 = \lambda$, soit $\lambda = 2xy$. En remplaçant dans la troisième équation, on a

$$\begin{aligned} 2y^3 + 2x - 2y &= 2xy^2 \iff 2y^2(y - x) = 2(y - x) \\ &\iff_{x \neq y} y^2 = 1 \\ &\iff y = \pm 1 \end{aligned}$$

comme $x^2 + y^2 = 2$, alors $x^2 = 1$ et $x = \pm 1$, soit $(x, y) = (-1, 1)$ ou $(1, -1)$.

Finalement, les points critiques de f sous la contrainte $\mathcal{C}$ sont $(1, 1), (-1, -1), (-1, 1)$ et $(1, -1)$.

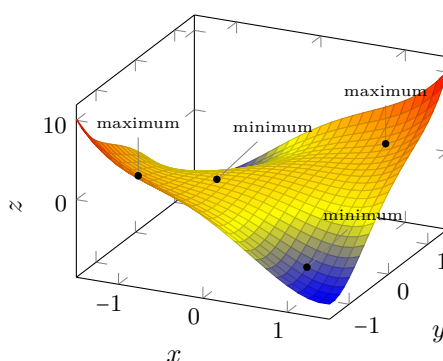
4. On a $f(0, 0) = 0$, $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$, $f(-1, 1) = f(1, -1) = -6$. Nous savons que M est le maximum global de f , donc c'est en particulier un maximum local de f .

- Si M est atteint en un point $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_1$, alors (x_0, y_0) est un point critique de f .
- Si M est atteint en un point de $\mathcal{C}$, alors (x_0, y_0) est un maximum local de f sous la contrainte $\mathcal{C}$, et donc (x_0, y_0) est un point critique de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Dans tous les cas, M est atteint en l'un des points critiques trouvés dans les questions précédentes. Le calcul nous montre alors que

- $M = 2$, atteint en $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.
- De même, $m = -6$, atteint en $(1, -1)$ et $(-1, 1)$.

Tracé de $z = f(x, y)$



Corrigé de l'exercice 23. f est de classe $\mathcal{C}^1$ (car polynomiale) sur l'ouvert $]0, 1[^n$ et

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = -n((1 - x_1)^{n-1}, \dots, (1 - x_n)^{n-1}).$$

Posons $g(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n - 1$ de sorte que $\mathcal{C} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, g(x_1, \dots, x_n) = 0\}$. On a g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $]0, 1[^n$ et $\nabla g(x_1, \dots, x_n) = (1, \dots, 1) \neq (0, \dots, 0)$.

Si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{C}$ est un point critique de f sous la contrainte $\mathcal{C}$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = 1 \\ \nabla f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \nabla g(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + \dots + x_n = 1 \\ -n(1 - x_1)^{n-1} = \lambda \\ \vdots \\ -n(1 - x_n)^{n-1} = \lambda \end{cases} \implies x_1 = \dots = x_n$$

Or $x_1 + \dots + x_n = 1$ donc $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$. Ainsi f admet un seul point critique $a = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ sous la contrainte $\mathcal{C}$. Pour déterminer la nature du point critique, on calcul la matrice hessienne de f en ce point.

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ (car polynomiale) sur l'ouvert $]0, 1[^n$ et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \begin{cases} n(n-1)(1-x_i)^{n-2} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Autrement dit, $H_f(a) = \text{diag}(n(n-1)(1-x_1)^{n-2}, \dots, n(n-1)(1-x_n)^{n-2})$.

- Les valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictement positifs, donc f admet un minimum local strict en a .

Corrigé de l'exercice 24. 1. f est de classe $\mathcal{C}^1$ (car polynomiale) sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$ et pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$f_A(x_1, \dots, x_n) = a_{k,k}x_k^2 + \sum_{j \neq k} a_{k,j}x_kx_j + \sum_{i \neq k} a_{i,k}x_ix_k + \sum_{i \neq k, j \neq k} a_{i,j}x_ix_j.$$

En dérivant par rapport à x_k on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_A}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n) &= 2a_{k,k}x_k + \sum_{j \neq k} a_{k,j}x_j + \sum_{i \neq k} a_{i,k}x_i \\ &= 2 \sum_{i=1}^n a_{k,i}x_i \quad \text{car } A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ donc } a_{i,k} = a_{k,i} \\ &= 2(AX)_k \quad \text{le coefficient à la } k\text{-ème ligne de } 2AX. \end{aligned}$$

Donc ${}^t \nabla f_A(x_1, \dots, x_n) = 2AX$ où $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$.

2. S est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\cdot\|_2$ donc S est un compact de $\mathbb{R}^n$. Comme f est continue (car polynomiale) sur S alors f admet un minimum et un maximum sur S .

3. Posons $g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$ de sorte que $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, g(x_1, \dots, x_n) = 0\}$. On a g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\nabla g(x_1, \dots, x_n) = 2(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ sur S .

- Si $f_A(x_1, \dots, x_n) = M$, alors f_A admet en $(x_1, \dots, x_n)$ un extremum local sous la contrainte S , et donc $(x_1, \dots, x_n)$ est un point critique de f_A sous la contrainte S . Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f_A(x_1, \dots, x_n) = \lambda \nabla g(x_1, \dots, x_n) \iff 2A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 2\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Et donc $f_A(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \|(x_1, \dots, x_n)\|_2^2 = \lambda$. Par suite, $\lambda = M$ et $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre M .

- Réciproquement, si $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre M , alors

$$f_A(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M \|(x_1, \dots, x_n)\|_2^2 = M.$$

4. On montrerait de même que $f_A(x_1, \dots, x_n) = m$ si, et seulement si, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre m .

- Si λ est une valeur propre de A , et si $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre unitaire de A associé à λ , alors $f_A(x_1, \dots, x_n) = \lambda \|(x_1, \dots, x_n)\|_2^2 = \lambda$. Donc $m \leq \lambda \leq M$.
- De plus, si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul, alors $\frac{x}{\|x\|_2} \in S$ et donc

$$m \leq f_A\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) \leq M \iff m \leq \frac{1}{\|x\|_2^2} f_A(x) \leq M \iff m\|x\|_2^2 \leq f_A(x) \leq M\|x\|_2^2.$$

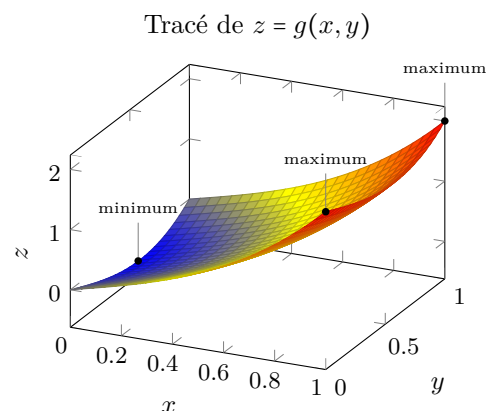
Et la dernière inégalité reste valable pour $x = 0$.

Corrigé de l'exercice 25. La fonction g est continue sur le carré $[0, 1]^2$ qui est compact, donc g est bornée et atteint ses bornes sur le carré.

Commençons d'abord par l'existence de points critiques de g sur l'ouvert $]0, 1[^2$. On a $\frac{\partial g}{\partial x} = 1 + 3x^2 \neq 0$ donc g n'a pas de points critiques, ce qui signifie que g atteint ses bornes sur le bord du carré.

Etude de g sur les quatre segments du bord.

- Sur le segment d'extrémités $(0, 0)$ et $(1, 0)$, on a $g(x, 0) = x + x^3$. Cette fonction est croissante sur $[0, 1]$, donc varie de $g(0, 0) = 0$ à $g(1, 0) = 2$. Il en est de même sur le segment d'extrémités $(0, 1)$ et $(1, 1)$ car $g(x, 0) = g(x, 1)$.
- Sur le segment d'extrémités $(0, 0)$ et $(0, 1)$, on a $g(0, y) = -y + y^3$. L'étude de cette fonction montre que son minimum est $g(0, 1/\sqrt{3}) = -2/3\sqrt{3}$ et son maximum est $g(0, 0) = g(0, 1) = 0$.
- Sur le segment d'extrémités $(1, 0)$ et $(1, 1)$, on a $g(1, y) = 2 - y + y^3$. L'étude de cette fonction montre que son minimum est $g(1, 1/\sqrt{3}) = 2 - 2/3\sqrt{3}$ et son maximum est $g(1, 0) = g(1, 1) = 2$.



Finalement, le maximum de g sur le carré est égal à 2 et est atteint en $(1, 0)$ et $(1, 1)$, alors que le minimum est égal à $-2/3\sqrt{3}$ et est atteint en $(0, 1/\sqrt{3})$.

Corrigé de l'exercice 26. 1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases} \iff (x, y) \in \{(1, 2), (-1, -2), (2, 1), (-2, -1)\}.$$

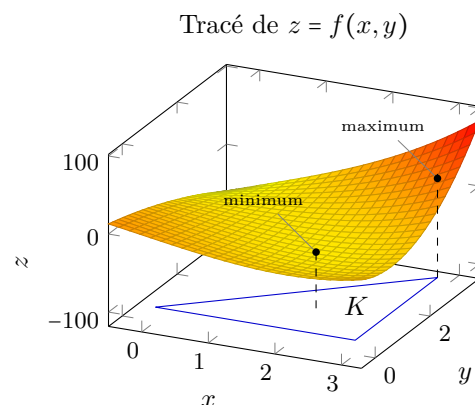
On obtient quatre points critiques.

2. On a $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6y$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6x$ donc $rt - s^2 = 36(x^2 - y^2)$.

- En $(2, 1)$, $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, donc f présente un minimum local.
- En $(-2, -1)$, $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, donc f présente un maximum local.
- En $(1, 2)$ et $(-1, -2)$, $rt - s^2 < 0$, donc il n'y a pas d'extrémum local.

3. Le triangle K est fermé borné de $\mathbb{R}^2$, donc compact. Comme f est continue, elle est bornée et atteint ses bornes sur K . A l'intérieur de K , le seul point critique est $(2, 1)$ et $f(2, 1) = -28$. On doit maintenant chercher les extremums de f à la frontière de K , constituée de trois segments.

- Sur le segment d'extrémités $(0, 0)$ et $(3, 0)$, on a $f(x, 0) = x^3 - 15x$. L'étude de cette fonction montre que son minimum est $f(\sqrt{5}, 0) = -10\sqrt{5}$ et son maximum est $\max(f(0, 0), f(3, 0)) = 0$.
- Sur le segment d'extrémités $(3, 0)$ et $(3, 3)$, on a $f(3, y) = 9y^2 - 12y - 18$. L'étude de cette fonction montre que son minimum est $f(3, 2/3) = -22$ et son maximum est $\max(f(3, 0), f(3, 3)) = 27$.
- Sur le segment d'extrémités $(0, 0)$ et $(3, 3)$, on a $f(x, x) = 4x^3 - 27x$. L'étude de cette fonction montre que son minimum est $f(3/2, 3/2) = -27$ et son maximum est $\max(f(0, 0), f(3, 3)) = 27$.



Finalement, le minimum de f sur le triangle K est égal à $f(2, 1) = -28$ et le maximum est $f(3, 3) = 27$.

Corrigé de l'exercice 27. 1. a. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ car polynomiale et on a :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = 2x_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x_i^2.$$

$$\text{Donc } \nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left(2x_1 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^n x_i^2, \dots, 2x_n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^n x_i^2 \right).$$

- b. S est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\cdot\|_2$ donc S est un compact de $\mathbb{R}^n$. Comme f est continue (car polynomiale) sur S alors f admet un minimum et un maximum sur S .
- c. Posons $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$ de sorte que $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0\}$. On a φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\nabla \varphi(x_1, \dots, x_n) = 2(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ sur S . Si $(x_1, \dots, x_n)$ est un point critique de f sous la contrainte S alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \varphi(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ \nabla f(x_1, \dots, x_n) &= \lambda \nabla \varphi(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1^2 + \dots + x_n^2 &= 1 \\ \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, 2x_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x_i^2 &= 2\lambda x_j \end{cases}.$$

- Si $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_j \neq 0$ alors, $\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n x_i^2 = \lambda$ donc $x_1^2 \dots = x_n^2$. De la première équation, on obtient $nx_1^2 = 1$ soit,

$$x_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{n}}. \text{ Dans ce cas, on a alors } f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n^n}.$$

- Si $\exists j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_j = 0$ alors, $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

D'où le maximum de f sur S est $\frac{1}{n^n}$.

- d. Soit $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul. On a $\frac{u}{\|u\|_2} \in S$ donc

$$f(u_1, \dots, u_n) = \|u\|_2^{2n} f\left(\frac{u_1}{\|u\|_2}, \dots, \frac{u_n}{\|u\|_2}\right) \leq \|u\|_2^{2n} \frac{1}{n^n} = \left(\frac{\|u\|_2}{\sqrt{n}}\right)^{2n}.$$

Il vient, $\sqrt{f(u_1, \dots, u_n)} = \left|\prod_{i=1}^n x_i\right| \leq \left(\frac{\|u\|_2}{\sqrt{n}}\right)^n$. Pour $u = 0$, l'inégalité est triviale.

2. a. Le vecteur $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0, \underbrace{1/a_i}_{i\text{-ème position}}, 0, \dots, 0)$ vérifie

$$h(x_1, \dots, x_n) = a_i \cdot \frac{1}{a_i} = 1 \quad \text{et} \quad \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{1}{|a_i|} \leq \frac{1}{|a_i|}.$$

Donc $B \cap H$ est non vide. De plus, $B \cap H$ est un fermé comme intersection de deux fermés et $B \cap H$ est borné car inclus dans B qui est borné, puisqu'il s'agit de la boule fermée de centre 0 et de centre $1/|a_i|$.

- b. On a $(0, \dots, 0, \underbrace{1/a_i}_{i\text{-ème position}}, 0, \dots, 0) \in B \cap H$ et $g(0, \dots, 0, \underbrace{1/a_i}_{i\text{-ème position}}, 0, \dots, 0) = \frac{1}{a_i^2}$ donc le minimum de g sur $B \cap H$ est

inférieur ou égal à $\frac{1}{a_i^2}$. Mais, si x est dans H mais pas dans B , alors $g(x) = \|x\|_2^2 > \frac{1}{a_i^2}$. Ainsi le minimum de g sur $B \cap H$ est également le minimum de g sur H tout entier.

- c. Posons $\psi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i - 1$ de sorte que $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \psi(x_1, \dots, x_n) = 0\}$. On a ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\nabla \psi(x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ sur H . Si $(x_1, \dots, x_n)$ est un point critique de g sous la contrainte H alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \psi(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ \nabla g(x_1, \dots, x_n) &= \lambda \nabla \psi(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i x_i &= 1 \\ \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, 2x_j &= \lambda x_j \end{cases}.$$

Donc $\frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1 \iff \lambda = \frac{2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}$. Par suite, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^n a_j^2}$. Ainsi, g admet un unique point critique

sous la contrainte H . Celui-ci correspond nécessairement au minimum de g sous la contrainte H , qui vaut donc

$$g\left(\frac{a_1}{\sum_{j=1}^n a_j^2}, \dots, \frac{a_n}{\sum_{j=1}^n a_j^2}\right) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n a_j^2}.$$

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^n x_i, \dots, \prod_{i \neq n} x_i \right) \quad \text{et} \quad \nabla g_s(x_1, \dots, x_n) = (1, \dots, 1).$$

2. • On a $X_s = \overline{U_n} \cap g_s^{-1}(\{0\})$ et $g_s^{-1}(\{0\})$ est un fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue donc X_s est fermé comme intersection de deux fermés. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_s$ alors, $x_i \in \llbracket 0, s \rrbracket$ pour tout $1 \leq i \leq n$ donc $X_s \subset \llbracket 0, s \rrbracket^n$ et X_s est borné. Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, alors X_s est compact.
- La restriction de f est continue sur le compact X_s donc admet un maximum sur X_s .
- On a $\left(\frac{s}{n}, \dots, \frac{s}{n}\right) \in X_s \cap U_n$ et $f\left(\frac{s}{n}, \dots, \frac{s}{n}\right) = \frac{s^n}{n^n} > 0$. donc le maximum de f sur $X_s \cap U_n$ est strictement positif. Mais, si x est dans X_s mais pas dans U_n , alors $f(x) = 0$. Ainsi le maximum de f sur X_s est également le maximum de f sur $X_s \cap U_n$.
3. f et g_s sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U_n et $\nabla g_s(x_1, \dots, x_n) = (1, \dots, 1) \neq (0, \dots, 0)$ sur $\{x \in U_n, g_s(x) = 0\}$. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est un point critique de f sous la contrainte $\{x \in U_n, g_s(x) = 0\}$ alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x \in U_n \\ g_s(x) = 0 \\ \nabla f(x) = \lambda \nabla g_s(x) \end{cases} \iff \begin{cases} (x_1, \dots, x_n) \in U_n \\ \sum_{i=1}^n x_i = s \\ \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \prod_{i \neq j} x_i = \lambda \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda > 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i = s \\ \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_j = \frac{f(x)}{\lambda} \end{cases}.$$

Donc f admet un unique point critique sous la contrainte $\{x \in U_n, g_s(x) = 0\}$. Celui-ci correspond nécessairement au maximum de f sur $X_s \cap U_n$. Ainsi, il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k = \frac{f(a)}{\lambda}$.

4. On a $a = (a_1, \dots, a_n) \in X_s \cap U_n$ donc $\sum_{i=1}^n a_i = s$ et $n \frac{f(a)}{\lambda} = s$. Ainsi, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in X_s \cap U_n$, on a

$$f(x) \leq f(a) = \prod_{i=1}^n a_i = \left(\frac{f(a)}{\lambda} \right)^n = \left(\frac{s}{n} \right)^n.$$

D'où, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_s \cap U_n$, $\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

5. Soit $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$. Si l'un des x_i est nul, alors l'inégalité est triviale. Supposons $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. D'après

la question précédente appliquer à $\left(\frac{x_1}{\sum_{j=1}^n x_j}, \dots, \frac{x_n}{\sum_{j=1}^n x_j} \right) \in X_1 \cap U_n$,

$$\left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{\sum_{j=1}^n x_j} \right)^{1/n} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n x_j} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sum_{j=1}^n x_j} = \frac{1}{n}.$$

Il vient $\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

3 Exemples d'équations aux dérivées partielles (EDP)

Corrigé de l'exercice 29. 1. a. Les solutions sur $\mathbb{R}^2$ de l'EDP : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ sont les fonctions $f : (x, y) \mapsto \varphi(y)$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

b. Les solutions sur $\mathbb{R}^2$ de l'EDP : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + y$ sont les fonctions $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}x^2 + xy + \varphi(y)$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

c. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, l'application partielle $y \mapsto f(x, y)$ a pour dérivée $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, donc solution de l'équation différentielle : $z'(y) = xz(y)$. Or la solution générale de celle-ci est $z(y) = C e^{xy}$ où $C \in \mathbb{R}$. D'où : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \varphi(x) e^{xy}$ avec $\varphi : x \mapsto f(x, 0)$ de classe $\mathcal{C}^1$.

2. a. Les solutions sur $\mathbb{R}^2$ de l'EDP : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0$ sont les fonctions $f : (x, y) \mapsto x\varphi(y) + \psi(y)$ avec $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- b. Les solutions sur $\mathbb{R}^2$ de l'EDP : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$ sont les fonctions $f : (x, y) \mapsto \varphi(x) + \psi(y)$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Corrigé de l'exercice 30. 1. Par la règle de la chaîne, on a

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda u + \alpha v, \mu u + \beta v) + \mu \frac{\partial f}{\partial y}(\lambda u + \alpha v, \mu u + \beta v) = h(\lambda u + \alpha v, \mu u + \beta v).$$

Donc il suffit de trouver l'expression de g puis, celle de f .

2. On choisit le changement de variable $x = 2u + v$ et $y = -3u - v$. La fonction $g(u, v) = f(2u + v, -3u - v)$ vérifie :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = f(2u + v, -3u - v) = g(u, v) \quad (*).$$

Les solutions de (*) sont de la forme $g : (u, v) \mapsto \varphi(v) e^u$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. D'où les solutions de l'EDP sont de la forme $f : (x, y) \mapsto \varphi(3x + 2y) e^{-x-y}$.

Corrigé de l'exercice 31. 1. a. On pose $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[$. Par la règle de la chaîne, on a

$$\begin{aligned} r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= x \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + y \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= \alpha f(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= \alpha g(r, \theta). \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation $r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \alpha g(r, \theta)$ est $g(r, \theta) = h(\theta) r^\alpha$ avec $h \in \mathcal{C}^1(]0, \pi[, \mathbb{R})$. Si on pose $\varphi(t) = h(\arccot t)$, alors la solution de l'EDP est $f(x, y) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right) (x^2 + y^2)^{\alpha/2}$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Avec le changement de variable précédent, on obtient $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cot \theta$, donc $g(r, \theta) = r \cot \theta + h(\theta)$ avec $h \in \mathcal{C}^1(]0, \pi[, \mathbb{R})$. D'où la solution de l'EDP est $f(x, y) = \frac{x}{y} \sqrt{x^2 + y^2} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solution. On considère le changement de variable $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ vérifie :

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) = r^2 \cos \theta \sin \theta \quad (*).$$

Les solutions de (*) sont de la forme $g : (r, \theta) \mapsto \frac{1}{2} r^2 \cos \theta \sin \theta + r\varphi_1(\theta) + \varphi_2(\theta)$ avec $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^2\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$. La solution de l'EDP est de la forme $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} xy + \sqrt{x^2 + y^2} \varphi_1\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) + \varphi_2\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$.

D'où la solution de l'EDP est de la forme $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$ avec $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Corrigé de l'exercice 32. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solution.

1. Par la règle de la chaîne, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) - \frac{1}{2c} \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right)(u, v) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c} \right) + \frac{1}{2c} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2c} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c} \right) + \frac{1}{2c} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \underbrace{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c} \right) \right]}_{=0} \\
 &\quad + \frac{1}{4c} \underbrace{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c} \right) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c} \right) \right]}_{=0 \text{ d'après le théorème de Schwartz.}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

2. Les solutions de $(*)$ sont de la forme $g : (u, v) \mapsto \varphi(u) + \psi(v)$ avec $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. La solution de l'EDP est de la forme $f : (x, y) \mapsto \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$ avec $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Corrigé de l'exercice 33. On considère le changement de variable $u = xy$ et $v = x + y$ et $g(u, v) = f(x, y)$. On a alors $f(x, y) = g(xy, x + y)$, et en dérivant par rapport à x et à y , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{\partial g}{\partial u}(xy, x + y) + \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x + y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \frac{\partial g}{\partial u}(xy, x + y) + \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x + y) \end{cases}$$

L'équation $(*)$ est équivalente à $(y - x) \frac{\partial g}{\partial u} + 3(x - y)g = 0$, donc $\frac{\partial g}{\partial u} = 3g$. La solution de cette dernière équation est $g(u, v) = h(v) e^{3u}$ avec $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. D'où la solution de l'EDP $(*)$ est

$$f(x, y) = \varphi(x + y) e^{3xy} \text{ avec } \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Corrigé de l'exercice 34. On considère le changement de variable $u = xy$ et $v = \frac{x}{y}$ et $g(u, v) = f(x, y)$. On a alors $f(x, y) = g(xy, \frac{x}{y})$, et par la formule de la chaîne, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{\partial g}{\partial u} \left(xy, \frac{x}{y} \right) + \frac{1}{y} \frac{\partial g}{\partial v} \left(xy, \frac{x}{y} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \frac{\partial g}{\partial u} \left(xy, \frac{x}{y} \right) - \frac{x}{y^2} \frac{\partial g}{\partial v} \left(xy, \frac{x}{y} \right)$$

de même, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = y \left[y \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \left(xy, \frac{x}{y} \right) + \frac{1}{y} \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} \left(xy, \frac{x}{y} \right) \right] + \frac{1}{y} \left[y \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \left(xy, \frac{x}{y} \right) + \frac{1}{y} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \left(xy, \frac{x}{y} \right) \right] \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x \left[x \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \left(xy, \frac{x}{y} \right) - \frac{x}{y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} \left(xy, \frac{x}{y} \right) \right] + \frac{2x}{y^3} \frac{\partial g}{\partial v} \left(xy, \frac{x}{y} \right) - \frac{x}{y^2} \left[x \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \left(xy, \frac{x}{y} \right) - \frac{x}{y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \left(xy, \frac{x}{y} \right) \right]. \end{cases}$$

D'après le théorème de Schwartz, on a $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$, donc l'EDP $(*)$ est équivalente à $2u \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - \frac{\partial g}{\partial v} = 0$. On intègre celle-ci par rapport à v , on obtient :

$$2u \frac{\partial g}{\partial u} - g = h(u) \text{ avec } h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}).$$

L'application partielle $u \mapsto \frac{\partial g}{\partial u}(u, v)$ est solution de l'équation $2uy' - y = h$ dont la solution générale est

$$g(u, v) = \underbrace{\psi(v) \exp\left(\frac{1}{2} \ln v\right)}_{\text{solution homogène}} + \underbrace{\varphi(u)}_{\text{solution particulière}} \quad \text{avec } \varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}).$$

D'où, la solution de l'EDP $(*)$ est $f(x, y) = \varphi(xy) + \sqrt{xy} \psi\left(\frac{x}{y}\right)$ avec $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Corrigé de l'exercice 35. On calcule les dérivées partielles premières et secondes de f :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2}h'\left(\frac{y}{x}\right) & , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x}h'\left(\frac{y}{x}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2y}{x^3}h'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4}h''\left(\frac{y}{x}\right) & , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{x^2}h''\left(\frac{y}{x}\right). \end{cases}$$

L'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ est équivalente à $(t^2 + 1)h'' + 2th' = 0$. La fonction h' satisfait à une EDL1. En la résolvant, on obtient $h'(t) = \lambda \exp\left(-\int_0^t \frac{2s}{s^2 + 1} ds\right) = \frac{\lambda}{1 + s^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Finalement,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = \lambda \arctan t + \mu \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

4 Vecteurs tangents à une partie

Corrigé de l'exercice 36. 1. Soit $a \in \mathcal{A}$. L'application constante $\gamma :]-1, 1[\rightarrow \mathcal{A}$ définie par $\gamma(t) = a$ est dérivable en 0 et on a $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = 0$. Donc $0 \in T_a \mathcal{A}$.

2. Soit $v \in T_a \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{A}$ dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. L'application $\theta :]-\frac{\varepsilon}{|\lambda|}, \frac{\varepsilon}{|\lambda|}[\rightarrow \mathcal{A}$ définie par $\theta(t) = \gamma(\lambda t)$ est dérivable en 0 et

$$\theta(0) = \gamma(0) = a \quad \text{et} \quad \theta'(0) = \lambda \gamma'(0) = \lambda v.$$

D'où $\lambda v \in T_a \mathcal{A}$.

3. Soit $v \in E$ non nul. On a $\mathcal{A}$ est un ouvert et $a \in \mathcal{A}$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset \mathcal{A}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| < \frac{\varepsilon}{\|v\|}$, donc $a + tv \in B(a, \varepsilon)$. Considérons alors l'application $\gamma :]-\frac{\varepsilon}{\|v\|}, \frac{\varepsilon}{\|v\|}[\rightarrow \mathcal{A}$ définie par $\gamma(t) = a + tv$. L'application γ est dérivable en 0 et

$$\gamma(0) = a \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = \lambda v.$$

Donc $v \in T_a \mathcal{A}$. Comme $0 \in T_a \mathcal{A}$ alors $E \subset T_a \mathcal{A}$. Par suite, $T_a \mathcal{A} = E$.

Corrigé de l'exercice 37. 1. a. L'application $\varphi_1 :]-1, 1[\rightarrow \mathcal{A}$ définie par $\varphi(t) = (t, 0)$ est dérivable en 0 et $\varphi(0) = a$, $\varphi'(0) = (1, 0)$. Donc $(1, 0) \in T_a \mathcal{A}$.

De même, en considérons l'application $t \mapsto (0, t)$, on obtient que $(0, 1) \in T_a \mathcal{A}$.

b. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a $\lambda(1, 0) \in T_a \mathcal{A}$ et $\mu(0, 1) \in T_a \mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A} = \text{Vect}((1, 0)) \cup \text{Vect}((0, 1)) \subset T_a \mathcal{A}$.

2. a. On a $\gamma'_1(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma_1(t) - \gamma_1(0)}{t - 0} = v_1 > 0$ donc par définition,

$$\exists \eta_1 > 0 \text{ tel que, } 0 < t < \eta_1 \implies \left| \frac{\gamma_1(t)}{t} - v_1 \right| < \frac{v_1}{2}.$$

Ainsi, il existe $\eta_1 > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, \eta_1[$, $\gamma_1(t) > 0$. De même, il existe $\eta_2 > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, \eta_2[$, $\gamma_2(t) > 0$. Il suffit de prendre $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ pour conclure.

b. Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathcal{A}$. Pour fixer les idées, supposons que $v_1 > 0$ et $v_2 > 0$. D'après la question précédente, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, \eta[$, $\gamma_1(t) > 0$ et $\gamma_2(t) > 0$, ce qui contredit le fait que γ est à valeurs dans $\mathcal{A}$. On vient de montrer que $T_a \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$.

3. Conclusion : $T_a \mathcal{A} = \mathcal{A}$.

4. Non : $T_a \mathcal{A} = \mathcal{A}$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$.

Corrigé de l'exercice 38. 1. f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, l'équation du plan affine tangent à la surface $\mathcal{S}_f$ au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est :

$$z = (x - x_0) \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}_{=a} + (y - y_0) \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{=b} + f(x_0, y_0)$$

soit $z = ax + by + c$.

2. f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, l'équation du plan affine tangent à la surface $\mathcal{S}_f$ au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est :

$$z = (x - x_0) \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}_{=-g'(x_0)} + (y - y_0) \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{=1} + f(x_0, y_0)$$

soit $z = -g'(x_0)(x - x_0) + y - g(x_0)$.

Corrigé de l'exercice 39.

- Une hyperbole est une ligne de niveau de l'application $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et la tangente en un point est orthogonale au gradient de f . Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un point de l'hyperbole. On a

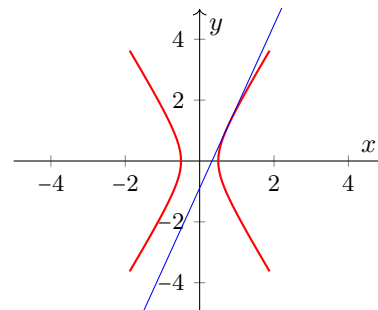
$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2} \right) \neq (0, 0).$$

- L'équation de la tangente est de la forme $\frac{2x_0}{a^2}x - \frac{2y_0}{b^2}y = c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Comme la tangente passe par le point (x_0, y_0) alors $c = \frac{2x_0}{a^2}x_0 - \frac{2y_0}{b^2}y_0 = 2$.

Donc la tangente à l'hyperbole au point (x_0, y_0) a pour équation $\frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y = 1$.

$$x^2/4 - y^2 = 1 \text{ et } (x_0, y_0) = (3, \sqrt{5}/2).$$



Corrigé de l'exercice 40. 1. Soit $v \in T_a B$, donc il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow B$ dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$. L'application $\phi :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow [0, 1]$ définie par $\phi(t) = \|\gamma(t)\|^2 = (\gamma(t) | \gamma(t))$ est dérivable en 0 et

$$\phi'(0) = 2(\gamma(0) | \gamma'(0)).$$

Or ϕ atteint son maximum en 0 donc $\phi'(0) = 0$ et $(\gamma(0) | \gamma'(0)) = 0$. Ainsi, $(v | a) = 0$.

2. Soit $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $(v | a) = 0$. L'application $t \mapsto a + tv$ est continue et non nul (en 0), donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a + tv \neq 0$ pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Soit alors l'application $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow B$ définie par

$$\gamma(t) = \frac{a + tv}{\|a + tv\|} = \frac{a + tv}{\sqrt{\|a\|^2 + t^2\|v\|^2}}.$$

On a $\gamma(0) = 0$ et γ est dérivable et $\gamma'(t) = \frac{(1 + t^2\|v\|^2)v - t\|v\|^2(a + tv)}{(\|a\|^2 + t^2\|v\|^2)^{3/2}}$. En particulier, $\gamma'(0) = v$. Ainsi $v \in T_a B$. D'où :

$$T_a B = \{v \in \mathbb{R}^3, (v | a) = 0\}.$$

Corrigé de l'exercice 41. 1. a. L'application $\varphi_1 :]-1, 1[\mapsto \mathcal{A}$ définie par $\varphi(t) = (t, 0)$ est dérivable en 0 et $\varphi(0) = a$, $\varphi'(0) = (1, 0)$. Donc $(1, 0) \in T_a \mathcal{A}$.

De même, en considérons l'application $t \mapsto (0, t)$, on obtient que $(0, 1) \in T_a \mathcal{A}$.

- b. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a $\lambda(1, 0) \in T_a \mathcal{A}$ et $\mu(0, 1) \in T_a \mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A} = \text{Vect}((1, 0)) \cup \text{Vect}((0, 1)) \subset T_a \mathcal{A}$.
2. a. On a $\gamma'_1(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma_1(t) - \gamma_1(0)}{t - 0} = v_1 > 0$ donc par définition,

$$\exists \eta_1 > 0 \text{ tel que, } 0 < t < \eta_1 \implies \left| \frac{\gamma_1(t)}{t} - v_1 \right| < \frac{v_1}{2}.$$

Ainsi, il existe $\eta_1 > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, \eta_1[$, $\gamma_1(t) > 0$. De même, il existe $\eta_2 > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, \eta_2[$, $\gamma_2(t) > 0$. Il suffit de prendre $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ pour conclure.

- b. Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathcal{A}$. Pour fixer les idées, supposons que $v_1 > 0$ et $v_2 > 0$. D'après la question précédente, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, \eta[$, $\gamma_1(t) > 0$ et $\gamma_2(t) > 0$, ce qui contredit le fait que γ est à valeurs dans $\mathcal{A}$. On vient de montrer que $T_a \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$.

3. Conclusion : $T_a \mathcal{A} = \mathcal{A}$.

4. Non : $T_a \mathcal{A} = \mathcal{A}$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$.

Corrigé de l'exercice 42. 1. Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$. On a

$$(\exp(tM))^\top \exp(tM) = \exp(tM^\top) \exp(tM) = \exp(-tM) \exp(tM) = \exp(tM - tM) = \exp(0) = I_n$$

donc $\exp(tM) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $M \in T_{I_n} \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Il existe $\varepsilon > 0$ et $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. Puisque $(\gamma(t))^\top \gamma(t) = I_n$, on obtient en dérivant

$$(\gamma'(0))^T \gamma(0) + (\gamma(0))^T \gamma'(0) = O_n$$

donc $M^T + M = O_n$. Ainsi $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Réciproquement, soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. D'après la première question, $\exp(tM) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc l'application $\gamma : t \mapsto \exp(tM)$ est à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. De plus, $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. Ainsi M est un vecteur tangent à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ en I_n . D'où $T_{I_n} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit $M \in T_\Omega \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Un calcul analogue au précédent conduit à

$$M^T \Omega + \Omega^T M = O_n$$

soit $(\Omega^{-1}M)^T = -\Omega^{-1}M$. Ainsi, $-\Omega^{-1}M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Réciproquement, on vérifie que $\gamma : t \mapsto \Omega \exp(t\Omega^{-1}M)$ définit une application dérivable à valeurs dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\gamma(0) = \Omega$, $\gamma'(0) = M$. D'où $T_\Omega \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \Omega^{-1}M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\}$.