

TD N°12

Calcul différentiel et optimisation

1 Différentiabilité et classe d'une fonction

Exercice 1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

1. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. **Indication :** Passant en coordonnées polaires.
2. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et calculer ses dérivées partielles.
3. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
4. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
5. La fonction f est-elle différentiable au point $(0, 0)$?

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

1. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue.
2. Montrer que la fonction f n'est pas continue à l'origine.

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

1. f est-elle continue ?
2. Montrer que f admet des dérivées dans toutes les directions en $(0, 0)$ et les calculer.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $D_v f(0, 0)$ pour tout vecteur v non nul de $\mathbb{R}^2$.
3. La fonction f est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$.

Montrer que f est différentiable et non $\mathcal{C}^1$.

Exercice 6. Contre-exemple de Peano. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que les dérivées partielles d'ordre 2 de f existent dans $\mathbb{R}^2$.
5. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 7. Soit $v = E_{i,j}$ la matrice élémentaire de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par $E_{i,j} = (\delta_{i,k} \delta_{j,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = \text{Tr}(M)I_n - M^2$. Calculer $D_v f(I_n)$.

Exercice 8. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \text{Tr}(M^T M)$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Calculer $D_{i,j} f(M)$, la dérivée de f en M selon $E_{i,j}$, pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 9. On muni $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par la norme $\|M\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j}^2}$ où $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par la norme $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ où $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $f_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_A(X) = X^\top A X$ est différentiable sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle.

Exercice 10. On considère une norme $\|\cdot\|$ sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $f_k : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f_k(M) = M^k$.

1. Calculer $df_k(I_n)$.
2. En déduire la différentielle de $\text{Tr} \circ f_k$ en I_n .
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(M+H)^k \underset{H \rightarrow 0}{=} M^k + \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-i-1} + O(\|H\|^2)$.
4. En déduire $df_k(M)$ et $d(\text{Tr} \circ f_k)(M)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E . Montrer que l'application $\varphi : x \mapsto \|x\|$ n'est pas différentiable en 0.

Exercice 12. Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace euclidien.

1. Montrer que $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \|x\|^2$ est différentiable sur E et calculer $d\varphi(x)$.
2. Montrer que $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = \|x\|$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et calculer $d\psi(x)$.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$ et g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = f(y, x)$.

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer les dérivées partielles d'ordres 1 et 2 de g en fonction de celles de f .

Exercice 14. Différentielle de l'inverse d'une matrice. Soit $f : M \mapsto M^{-1}$ définie sur l'ouvert $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. En exploitant l'identité $(I_n + H)(I_n - H) = I_n - H^2$, établir que l'application f est différentiable en I_n .
2. En déduire que f est différentiable en toute matrice $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et exprimer sa différentielle.

Exercice 15. Laplacien en coordonnées polaires.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ appelé le laplacien de f . Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Montrer que : $\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)$.

Exercice 16. Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy < 1\}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \arctan x + \arctan y - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

1. Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que U est connexe par arcs.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U puis calculer les dérivées partielles de f .
4. En déduire que : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xy < 1$, $\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$.

Exercice 17. Fonction α -homogène. Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$. On dit que f est α -homogène si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*, \quad f(tx_1, \dots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \dots, x_n).$$

1. Donner un exemple d'une telle fonction.
- Dans toute la suite, on suppose $\alpha > 1$ et f de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Supposons f est α -homogène. Montrer que, les dérivées partielles de f sont $(\alpha - 1)$ -homogènes et que $f(0) = 0$.
 3. Réciproquement, supposons que les dérivées partielles de f sont $(\alpha - 1)$ -homogènes et que $f(0) = 0$. On pose, pour tout $(x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$, $g(x_1, \dots, x_n) = f(tx_1, \dots, tx_n) - t^\alpha f(x_1, \dots, x_n)$.
 - a. Montrer que g est constante.
 - b. En déduire que f est α -homogène.
 4.
 - a. Montrer que, si f est α -homogène alors, f satisfait l'EDP : $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha f \quad (\mathcal{E})$.
 - b. Réciproquement, supposons f satisfait $(\mathcal{E})$. Montrer que la fonction g , définie ci-dessus, vérifie une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.

En déduire que f est α -homogène.

2 Optimisation

Exercice 18. Un contre exemple afin d'éviter toute confusion. Montrer que la fonction f définie sur $[0, 1]^2$ par $f(x, y) = xy$ admet un maximum global en $(1, 1)$ et que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \neq 0$. Que pensez-vous ?

Exercice 19. Déterminer les extrema de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x \arctan y - y$.

Indication : Pour montrer qu'une fonction f n'a pas d'extremum local en un point a on peut, par exemple, chercher deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a telles que $(f(x_n) - f(a))(f(y_n) - f(a)) < 0$.

Exercice 20. CCP PSI 2007. Soit $g(x, y) = x^3 + 3x^2y + y^3$.

1. Existe-t-il des points pour lesquels $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$?
2. La fonction g possède-t-elle des extremums locaux ?

Exercice 21. Déterminer les extrema de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 + x - y + \frac{1}{2}$.

Indication : Pour étudier le signe de la différence $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ où (x_0, y_0) un point critique de f , posons $u = x - x_0$ et $v = y - y_0$ puis exprimer $f(x, y)$ en fonction de u et v .

Exercice 22. Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 2\}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

1. Montrer que f admet sur $\mathcal{D}$ un maximum M et un minimum m .
2. Déterminer l'ensemble des points critiques de f sur l'ouvert $\mathcal{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 2\}$.
3. Déterminer les points critiques de f sous la contrainte $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 2\}$.
4. Déterminer m et M .

Exercice 23. D'après EDHEC 2001. Soit $n \geq 2$ et $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (1 - x_i)^n$.

Déterminer les extrema locaux de f sous la contrainte $\mathcal{C} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + \dots + x_n = 1\}$.

Exercice 24. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et f_A la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f_A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j a_{i,j}$.

On note $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$.

1. Montrer que f_A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, et calculer ses dérivées partielles.
2. Justifier que f_A admet un maximum M et un minimum m sur S .
3. Montrer que $f_A(x_1, \dots, x_n) = M$ si, et seulement si, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre M .
4. En déduire que M (resp. m) est la plus grande (resp. plus petite) valeur propre de A , et que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$m \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq f_A(x_1, \dots, x_n) \leq M \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Exercice 25. CCP PSI 2006. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = x - y + x^3 + y^3$. Montrer que g admet des extremums sur le carré $[0, 1]^2$ et les déterminer.

Exercice 26. TPE 2006. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

1. Déterminer les points critiques de f .
2. Déterminer les extremums locaux de f sur $\mathbb{R}^2$. La fonction f admet-elle des extremums absolus sur $\mathbb{R}^2$?
3. Déterminer les extremums locaux et absolus de f sur l'ensemble K défini par $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq x \leq 3\}$.

Exercice 27. Oral ESCP 2015. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1, \dots, a_n$ des réels non tous nuls. On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^2, \quad g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \text{et} \quad h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

1. a. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Déterminer son gradient en tout point.

- Lorsque $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[$ unique tel que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arccot\left(\frac{x}{y}\right)$.
1. Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ solutions de EDP : $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
 2. Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ solutions de EDP : $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{y} \sqrt{x^2 + y^2}$.
 3. Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de l'EDP : $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = xy$.

Exercice 32. Équation des ondes. Soit $c > 0$. On considère sur $\mathbb{R}^2$ l'EDP suivante : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = 0$.
On pose $u = x + ct$ et $v = x - ct$.

1. Montrer que la fonction $g(u, v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)$ vérifie : $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0$ (*)
2. Résoudre (*).
3. En déduire les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ solutions de l'EDP.

Exercice 33. CCP PC 2005. Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y > 0\}$. En utilisant le changement de variables $\Phi(x, y) = (xy, x + y)$, trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ vérifiant l'EDP : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + 3(x - y)f(x, y) = 0$ (*).

Exercice 34. En utilisant le changement de variables $(u, v) = \left(xy, \frac{x}{y}\right)$ déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2\left((\mathbb{R}_+^*)^2, \mathbb{R}\right)$ vérifiant l'EDP : $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$ (*).

Exercice 35. CCP MP 2007. Déterminer les fonctions $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $f(x, y) = h\left(\frac{y}{x}\right)$ vérifie : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

4 Vecteurs tangents à une partie

Exercice 36. Soit $\mathcal{A}$ une partie de E et $a \in \mathcal{A}$.

1. Montrer que, le vecteur 0 est tangent à $\mathcal{A}$ en tout point de $\mathcal{A}$.
2. Montrer que, si $v \in T_a \mathcal{A}$, alors $\lambda v \in T_a \mathcal{A}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
3. Montrer que, si $\mathcal{A}$ est un ouvert de E , alors $T_a \mathcal{A} = E$.

Exercice 37. Soit $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$ et $a = (0, 0)$.

1. a. Montrer que $(1, 0) \in T_a \mathcal{A}$ et que $(0, 1) \in T_a \mathcal{A}$.
b. En déduire que $\mathcal{A} \subset T_a \mathcal{A}$.
2. Soit $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v_1 > 0$ et $v_2 > 0$. Supposons qu'il existe une application $\gamma : t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ définie au voisinage de 0 et à valeurs dans $\mathcal{A}$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = (v_1, v_2)$.
a. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, \eta[$, $\gamma_1(t) > 0$ et $\gamma_2(t) > 0$.
b. En déduire que $T_a \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$.
3. Conclure.
4. $T_a \mathcal{A}$ est-il un sev de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 38. Déterminer, dans chaque cas, l'équation du plan affine tangent à la surface $\mathcal{S}_f$:

1. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto ax + by + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
2. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y - g(x)$ avec $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 39. Tangente à une hyperbole. On appelle hyperbole une courbe du plan d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, où $a, b > 0$. Donner une équation de la tangente en un point (x_0, y_0) de cette hyperbole.

Exercice 40. Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ et $B = \{x \in \mathbb{R}^3, \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermé de $\mathbb{R}^3$. Soit a un point de S . On veut montrer que :

$$T_a B = \left\{ v \in \mathbb{R}^3, \quad (v \mid a) = 0 \right\}.$$

1. Montrer que, si v est un vecteur tangent à B en a alors $(v \mid a) = 0$.
2. Réciproquement, montrons que tout vecteur v orthogonal à a est un vecteur tangent à B en a .

Indication : Considérons l'application $t \mapsto \frac{a + tv}{\|a + tv\|}$.

Exercice 41. Vecteurs tangents à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad M^\top M = I_n \right\}$ le groupe des matrices orthogonales et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad M^\top = -M \right\}$ le sev des matrices antisymétriques.

1. Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tM) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $T_{I_n} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $T_\Omega \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Omega^{-1} M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \right\}$.

Indication : Considérons l'application $t \mapsto \Omega \exp(t\Omega^{-1}M)$.