

TD N°11

Équations différentielles linéaires (correction)

1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 vectorielles

Corrigé de l'exercice 1. 1. On a $\varphi_1'(t) = A(t) \cdot \varphi_1(t)$ et $\varphi_2'(t) = A(t) \cdot \varphi_2(t)$ donc φ_1, φ_2 sont deux solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$. Comme $W(t) = \begin{vmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{vmatrix} = 1 + t^2 \neq 0$, le couple (φ_1, φ_2) est un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.

2. Cherchons une solution particulière φ de $(\mathcal{E})$ sous la forme : $\varphi : t \mapsto \lambda_1(t)\varphi_1(t) + \lambda_2(t)\varphi_2(t)$. La méthode de variation des constantes montre que les fonctions λ_1' et λ_2' sont solutions de :

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) + t\lambda_2'(t) &= \frac{2t^2 - 1}{1 + t^2} \\ -t\lambda_1'(t) + \lambda_2'(t) &= \frac{3t}{1 + t^2} \end{cases}$$

Soit $\lambda_1'(t) = \frac{-1}{1+t^2}$ et $\lambda_2'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$ donc $\forall t \in \mathbb{R}, \lambda_1(t) = -\arctan(t)$ et $\lambda_2(t) = \ln(1+t^2)$.

D'où $X : t \mapsto \begin{pmatrix} -\arctan(t) + t \ln(1+t^2) \\ t \arctan(t) + \ln(1+t^2) \end{pmatrix}$ est une solution particulière de $(\mathcal{E})$.

3. D'après ce qui précède : $S_{\mathcal{E}} = \left\{ X : t \mapsto \begin{pmatrix} -\arctan(t) + t \ln(1+t^2) \\ t \arctan(t) + \ln(1+t^2) \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Corrigé de l'exercice 2. 1. Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ une solution de $(*)$ donc $\begin{cases} x'(t) &= x(t) \cos t - y(t) \sin t \\ y'(t) &= x(t) \sin t + y(t) \cos t \end{cases}$.

Posons $z(t) = x(t) + iy(t)$. On a

$$z'(t) = (x(t) \cos t - y(t) \sin t)' + i(x(t) \sin t + y(t) \cos t)' = e^{it} z(t)$$

donc z est solution d'une équation différentielle scalaire du premier ordre dont les solutions sont les fonctions z telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, z(t) = \lambda \exp(-i e^{it}) = \lambda e^{\sin t} (\cos(\cos t) - i \sin(\cos t)) \text{ où } \lambda \in \mathbb{C}.$$

On écrit $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ on obtient $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{\sin t} \begin{pmatrix} \cos(\cos t) \\ -\sin(\cos t) \end{pmatrix} + \beta e^{\sin t} \begin{pmatrix} \sin(\cos t) \\ \cos(\cos t) \end{pmatrix}$.

2. Les fonctions $\varphi_1 : t \mapsto e^{\sin t} \begin{pmatrix} \cos(\cos t) \\ -\sin(\cos t) \end{pmatrix}$ et $\varphi_2 : t \mapsto e^{\sin t} \begin{pmatrix} \sin(\cos t) \\ \cos(\cos t) \end{pmatrix}$ forment un s.f.s de $(*)$ à valeurs réelles car $W(t) = e^{2 \sin t} \neq 0$. D'où $S = \left\{ t \mapsto \alpha \varphi_1(t) + \beta \varphi_2(t), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Corrigé de l'exercice 3. 1. La solution générale de l'équation différentielle homogène associée à $(*)$ est

$$X(t) = e^{tA} \cdot X_0 \text{ avec } X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

On a $\text{rg}(A) = 1$ donc $A^2 = \text{tr}(A) \cdot A = 0$ et $e^{tA} = I_3 + tA$. Ainsi

$$X(t) = \begin{pmatrix} \alpha(1-t) + \beta t - 2\delta t \\ \alpha t + \beta(1-t) + 2\delta t \\ \alpha t - \beta t + \delta(1+2t) \end{pmatrix} = \underbrace{\alpha \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ t \end{pmatrix}}_{=\varphi_1(t)} + \underbrace{\beta \begin{pmatrix} t \\ 1-t \\ -t \end{pmatrix}}_{=\varphi_2(t)} + \underbrace{\delta \begin{pmatrix} -2t \\ 2t \\ 1+2t \end{pmatrix}}_{=\varphi_3(t)} \text{ avec } (\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R}^3.$$

De plus $W(0) = \det(\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0)) = \det(I_3) = 1 \neq 0$ d'où $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ forme un s.f.s de l'équation différentielle homogène associée à $(*)$.

2. Cherchons une solution particulière φ de $(\star)$ sous la forme : $\varphi : t \mapsto \lambda_1(t)\varphi_1(t) + \lambda_2(t)\varphi_2(t) + \lambda_3(t)\varphi_3(t)$.

La méthode de variation des constantes montre que les fonctions λ'_1, λ'_2 et λ'_3 sont solutions de :

$$\begin{cases} (1-t)\lambda'_1(t) + t\lambda'_2(t) - 2t\lambda'_3(t) &= t \\ t\lambda'_1(t) + (1-t)\lambda'_2(t) + 2t\lambda'_3(t) &= 0 \\ t\lambda'_1(t) - t\lambda'_2(t) + (1+2t)\lambda'_3(t) &= -t \end{cases}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} \lambda'_1(t) + \lambda'_3(t) &= 0 & (L_1 + L_3) \\ \lambda'_2(t) - \lambda'_3(t) &= t & (L_2 - L_3) \\ \lambda'_1(t) + \lambda'_2(t) &= t & (L_2 + L_3) \end{cases} \text{ donc } \lambda_1(t) = \lambda_3(t) = 0 \text{ et } \lambda_2(t) = t^2/2.$$

Ainsi $\varphi(t) = \lambda_2(t)\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} t^3/2 \\ (1-t)t^2/2 \\ -t^3/2 \end{pmatrix}$ est une solution particulière de $(\star)$.

3. L'ensemble S des solutions de $(\star)$ est $S = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} t^3/2 \\ (1-t)t^2/2 \\ -t^3/2 \end{pmatrix} + \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t) + \delta\varphi_3(t), (\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Corrigé de l'exercice 4. 1. On a

$$\begin{aligned} \chi_A(X) = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-2 & 0 & -1 \\ 1 & X-1 & 0 \\ 1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} X-2 & 0 & -1 \\ -X+2 & X-1 & 0 \\ 0 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \\ &= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & X-1 & 0 \\ 0 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{=} (X-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \\ &= (X-2) \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 1 & X-3 \end{vmatrix} \\ &= (X-2)((X-1)(X-3) + 1) = (X-2)^3 \end{aligned}$$

donc $\text{Sp}(A) = \{2\}$.

2. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ de sorte que $(\Sigma) \iff X'(t) = A.X(t)$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton $\chi_A(A) = 0$,

donc $(A - 2I_3)^3 = 0$ i.e. la matrice $A - 2I_3$ est nilpotente. Par suite

$$e^{tA} = e^{2tI_3 + t(A-2I_3)} = e^{2tI_3} e^{t(A-2I_3)} = e^{2t} \sum_{k=0}^2 \frac{t^k}{k!} (A-2I_3)^k = e^{2t} \left(I_3 + t(A-2I_3) + \frac{t^2}{2} (A-2I_3)^2 \right).$$

$$\text{Donc } e^{tA} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t^2/2 & t^2/2 & t+t^2/2 \\ t-t^2/2 & 1-t+t^2/2 & t^2/2 \\ -t & t & 1+t \end{pmatrix}.$$

Les solutions de l'équation $X'(t) = A.X(t)$ sont les fonctions $t \mapsto X(t) = e^{tA}.C$ où $C = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Il s'ensuit que

$$X(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 t + (\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1)t^2/2 \\ \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)t + (\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1)t^2/2 \\ \lambda_3 + (\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1)t \end{pmatrix}. \text{ D'où}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1(t) &= \lambda_1 + \lambda_3 t + (\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1)t^2/2 \\ x_2(t) &= \lambda_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)t + (\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1)t^2/2 \\ x_3(t) &= \lambda_3 + (\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1)t \end{cases} \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3.$$

3. On a $x_1(0) = 1, x_2(0) = -1, x_3(0) = 0$ donc $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$. Ainsi $\begin{cases} x_1(t) = 1 - t^2 \\ x_2(t) = -(t-1)^2 \\ x_3(t) = -2t \end{cases}$.

Corrigé de l'exercice 5. 1. On a :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 1 & -1 & X \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ X-1 & X-2 & 1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\ &= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_2 \leftarrow C_2 + C_3}{=} (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & X-1 & 1 \\ 0 & X-1 & X \end{vmatrix} \\ &= (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} \\ &= (X-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & X \end{vmatrix} = (X-1)^2(X-2) \end{aligned}$$

donc $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$ et

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$\begin{matrix} =v_1 & =v_2 & & =v_3 \end{matrix}$

Donc A est diagonalisable : $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ de sorte que $(\Sigma_0) \iff X'(t) = A.X(t)$. On a

$$X'(t) = A.X(t) \iff X'(t) = PDP^{-1}.X(t) \iff P^{-1}.X'(t) = \underbrace{DP^{-1}.X(t)}_{Y(t)} \iff Y'(t) = D.Y(t).$$

Si $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ alors

$$Y'(t) = D.Y(t) \iff \begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) \\ y_2'(t) = y_2(t) \\ y_3'(t) = 2y_3(t) \end{cases} \iff \begin{cases} y_1(t) = \lambda_1 e^t \\ y_2(t) = \lambda_2 e^t \\ y_3(t) = \lambda_3 e^{2t} \end{cases}, \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Par suite, $X(t) = P.Y(t) = \begin{pmatrix} (\lambda_1 - \lambda_2) e^t - \lambda_3 e^{2t} \\ \lambda_1 e^t + \lambda_3 e^{2t} \\ (\lambda_1 + \lambda_2) e^t + \lambda_3 e^{2t} \end{pmatrix}$. D'où $\begin{cases} x_1(t) = (\lambda_1 - \lambda_2) e^t - \lambda_3 e^{2t} \\ x_2(t) = \lambda_1 e^t + \lambda_3 e^{2t} \\ x_3(t) = (\lambda_1 + \lambda_2) e^t + \lambda_3 e^{2t} \end{cases}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

3. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ -e^t \end{pmatrix}$ de sorte que $(\Sigma) \iff X'(t) = A.X(t) + B(t)$.

La solution générale de (Σ_0) s'écrit $\varphi_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \lambda_1 \varphi_1(t) + \lambda_2 \varphi_2(t) + \lambda_3 \varphi_3(t)$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ où

$$\varphi_1 : t \mapsto \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 : t \mapsto \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} -e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi_3 : t \mapsto \varphi_3(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}.$$

La famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ forment un s.f.s de $X'(t) = A.X(t)$ car $W(t) = -e^{4t} \neq 0$. Cherchons une solution particulière φ de (Σ) sous la forme $\varphi : t \mapsto \lambda_1(t)\varphi_1(t) + \lambda_2(t)\varphi_2(t) + \lambda_3(t)\varphi_3(t)$. La méthode de variation des constantes montre que les fonctions λ'_1, λ'_2 et λ'_3 sont solutions de :

$$\begin{cases} \lambda'_1(t)e^t - \lambda'_2(t)e^t - \lambda'_3(t)e^{2t} &= e^t \\ \lambda'_1(t)e^t + \lambda'_3(t)e^{2t} &= e^{2t} \\ \lambda'_2(t)e^t + \lambda'_3(t)e^{2t} &= -e^t \end{cases}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} \lambda'_1(t) &= 0 \\ \lambda'_2(t) &= -1 - e^t \\ \lambda'_3(t) &= 1 \end{cases} \quad \text{donc } \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \lambda_1(t) &= 0 \\ \lambda_2(t) &= -t - e^t \\ \lambda_3(t) &= t \end{cases} \quad \text{par suite } \varphi(t) = \begin{pmatrix} te^t - (t-1)e^{2t} \\ te^{2t} \\ -te^t + (t-1)e^{2t} \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) &= (\lambda_1 - \lambda_2)e^t - \lambda_3 e^{2t} &+ te^t - (t-1)e^{2t} \\ x_2(t) &= \lambda_1 e^t + \lambda_3 e^{2t} &+ te^{2t} \\ x_3(t) &= (\lambda_1 + \lambda_2)e^t + \lambda_3 e^{2t} &+ -te^t + (t-1)e^{2t} \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Corrigé de l'exercice 6. 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$ de sorte que $X'(t) = A.X(t)$.

2. On a :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 2 & 5 & X+4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} X+1 & -1 & 0 \\ -X-1 & X & -1 \\ X+1 & 5 & X+4 \end{vmatrix} \\ &= (X+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ 1 & 5 & X+4 \end{vmatrix} \\ &= (X+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & X-1 & -1 \\ 1 & 6 & X+4 \end{vmatrix} \\ &= (X+1) \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 6 & X+4 \end{vmatrix} \\ &= (X+1)((X-1)(X+4) + 6) = (X+1)^2(X+2) \end{aligned}$$

3. La division euclidienne de X^n par χ_A s'écrit $X^n = \chi_A.Q_n + R_n$ avec $\deg R_n \leq 2$. Pour rendre les calculs qui suivent plus simples, on exprime le reste R dans la base de Taylor $(1, (X+1), (X+1)^2)$:

$$R = a_n(X+1)^2 + b_n(X+1) + c_n \quad \text{avec } (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3.$$

On détermine ensuite a_n, b_n et c_n en évaluant l'identité

$$X^n = \chi_A.Q_n + a_n(X+1)^2 + b_n(X+1) + c_n \quad (**).$$

en -2 , en -1 et en dérivant $(\star\star)$ avant d'évaluer à nouveau en -1 . On obtient
$$\begin{cases} a_n - b_n + c_n &= (-2)^n \\ c_n &= (-1)^n \\ b_n &= n(-1)^{n-1} \end{cases}.$$

Donc $R_n = (-1)^n(2^n - n - 1)(X + 1)^2 + n(-1)^{n-1}(X + 1) + (-1)^n$. Enfin, en évaluant $(\star\star)$, en la matrice A :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (-1)^n(2^n - n - 1)(A + I_3)^2 + n(-1)^{n-1}(A + I_3) + (-1)^n I_3.$$

4. la solution générale de $X'(t) = A.X(t)$ est $X(t) = e^{tA}.C$ où $C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Mais

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} ((-1)^n(2^n - n - 1)(A + I_3)^2 + n(-1)^{n-1}(A + I_3) + (-1)^n I_3) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2^n - n - 1)}{n!} t^n \right) (A + I_3)^2 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(-1)^{n-1}}{n!} t^n \right) (A + I_3) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n \right) I_3 \\ &= (e^{-2t} + te^{-t} - e^{-t}) (A + I_3)^2 + te^{-t} (A + I_3) + e^{-t} I_3. \end{aligned}$$

Il suffit alors de calculer la première ligne de $(A + I_3)$ et $(A + I_3)^2$ pour pouvoir exprimer $x(t)$ en fonction de α, β et δ :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \alpha(e^{-2t} + 2te^{-t}) + \beta(2e^{-2t} + 3te^{-t} - 2e^{-t}) + \delta(e^{-2t} + te^{-t} - e^{-t}) \quad \text{avec } (\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R}^3.$$

Corrigé de l'exercice 7. 1. On a :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ -1 & 3 & X-3 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 1 \\ X-1 & X-1 & 0 \\ X-1 & 3 & X-3 \end{vmatrix} \\ &= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & X-1 & 0 \\ 1 & 3 & X-3 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & 4 & X-4 \end{vmatrix} \\ &= (X-1) \begin{vmatrix} X & -1 \\ 4 & X-4 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)(X(X-4) + 4) = (X-1)(X-2)^2 \end{aligned}$$

Les polynômes $(X-1)$ et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux, d'après le lemme de décomposition des noyaux,

$$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \ker(\chi_A(A)) = \ker(I_3 - A) \oplus \ker(2I_3 - A)^2.$$

$$2. \quad \ker(I_3 - A) = E_1(A) = \underbrace{\text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \quad \ker(2I_3 - A) = E_2(A) = \underbrace{\text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=v_2}.$$

3. On a $\ker(2I_3 - A) \subset \ker(2I_3 - A)^2$ donc il suffit de compléter (v_1, v_2) en une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$v_3 \in \ker(2I_3 - A)^2 \text{ et } Av_3 = -v_2 + 2v_3. \text{ Par exemple, } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ de sorte que $(\Sigma) \iff X'(t) = A.X(t)$. D'après ce qui précède : $A = PTP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } X'(t) = A.X(t) \iff X'(t) = PTP^{-1}.X(t) \iff P^{-1}.X'(t) = \underbrace{TP^{-1}.X(t)}_{Y(t)} \iff Y'(t) = T.Y(t).$$

Si on note $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$, alors

$$Y'(t) = T.Y(t) \iff \begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) - y_3(t) \\ y_3'(t) = 2y_3(t) \end{cases} \iff \begin{cases} y_1(t) = \lambda_1 e^t \\ y_2(t) = 2y_2(t) - \lambda_3 e^{2t} \\ y_3(t) = \lambda_3 e^{2t} \end{cases}, \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Or la solution générale de l'équation $y_2'(t) = 2y_2(t) - \lambda_3 e^{2t}$ est

$$y_2(t) = \underbrace{\lambda_2 e^{2t}}_{\text{solution homogène}} + \underbrace{-\lambda_3 t e^{2t}}_{\text{solution particulière}}, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Par suite, } X(t) = P.Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^t + (\lambda_2 - \lambda_3 t) e^{2t} \\ \lambda_1 e^t \\ \lambda_1 e^t + (-\lambda_2 + \lambda_3 t + \lambda_3) e^{2t} \end{pmatrix}. \text{ D'où } \begin{cases} x_1(t) = \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t} - \lambda_3 t e^{2t} \\ x_2(t) = \lambda_1 e^t \\ x_3(t) = \lambda_1 e^t - \lambda_2 e^{2t} + \lambda_3 t e^{2t} + \lambda_3 e^{2t} \end{cases}.$$

Corrigé de l'exercice 8. 1. On a $f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} M^k = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)$.

- Chaque f_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- $\sum f_k$ converge simplement sur I . (série exponentielle)
- $\sum f_k'$ converge uniformément sur tout segment $\subset I$ car pour tout segment $[\alpha, \beta] \subset I$, on a

$$\begin{aligned} \forall t \in [\alpha, \beta], \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \|f_k'(t)\| &= \frac{|t|^{k-1}}{(k-1)!} \|M^k\| \\ &\leq \frac{|t|^{k-1}}{(k-1)!} \|M\|^k \\ &\leq \frac{\alpha_0^{k-1}}{(k-1)!} \|M\|^k \quad \text{où } \alpha_0 = \max(|\alpha|, |\beta|) \end{aligned}$$

et la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\alpha_0^{k-1}}{(k-1)!} \|M\|^k$ converge (série exponentielle réelle).

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, $t \mapsto f(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k t^{k-1}}{k!} M^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} M^k = M \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} M^k = M f(t) = f(t) M.$$

2. a. On a

$$\begin{aligned} Y'(t) &= A.Y(t) + B(t) &\iff \exp(-tA).Y'(t) &= \exp(-tA)A.Y(t) + \exp(-tA).B(t) \\ &&\iff \exp(-tA).Y'(t) - \exp(-tA)A.Y(t) &= \exp(-tA).B(t) \\ &&\iff Z'(t) &= \exp(-tA).B(t) \\ &&\iff \exp(tA).Z'(t) &= B(t) \end{aligned}$$

avec $Z(t) = \exp(-tA).Y(t)$ qui est, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si, et seulement si, Y l'est.

b. La solution générale de l'équation $\exp(tA).Z'(t) = B(t)$ est $Z(t) = Z(t_0) + \int_{t_0}^t \exp(-sA).B(s)ds$ où $t_0 \in I$. D'où

$$Y(t) = \exp(tA).v + \int_{t_0}^t \exp((t-s)A).B(s)ds, \quad \text{où } v = Z(t_0) \in \mathbb{K}^n.$$

3. Ici $B(t) = 0$ donc la solution générale du système différentiel homogène $Y' = A.Y$ est de la forme $Y(t) = \exp(tA).v$ où $v \in \mathbb{K}^n$. On écrit v dans la base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$: $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Mais

$$\exp(tA).v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \exp(tA).v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.v_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_i^k v_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda_i^k \right).v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \exp(\lambda_i t) v_i.$$

Ainsi, $Y(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \exp(\lambda_i t) v_i$, où $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$.

4. On pose $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ de sorte que $(\Sigma) \iff Y' = A.Y$. On a

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X & -2 & 1 \\ -3 & X+2 & 0 \\ 2 & -2 & X-1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{=} \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 2-X \\ -3 & X+2 & 0 \\ 2 & -2 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & X+2 & 0 \\ 2 & -2 & X-1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_3 \leftarrow C_3 + C_2 + C_1}{=} (X-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & X+2 & X-1 \\ 2 & -2 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)(X-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & X+2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)(X-2) \begin{vmatrix} X+2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)(X+4) \end{aligned}$$

Donc $\text{Sp}(A) = \{1, 2, -4\}$ et

$$E_1(A) = \underbrace{\text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \quad E_2(A) = \underbrace{\text{Vect} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=v_2} \quad \text{et} \quad E_{-4}(A) = \underbrace{\text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=v_3}.$$

Et $Y(t) = \alpha_1 e^t v_1 + \alpha_2 e^{2t} v_2 + \alpha_3 e^{-4t} v_3$. D'où $\begin{cases} x(t) &= \alpha_1 e^t + 4\alpha_2 e^{2t} + 2\alpha_3 e^{-4t} \\ y(t) &= \alpha_1 e^t + 3\alpha_2 e^{2t} - 3\alpha_3 e^{-4t} \\ z(t) &= \alpha_1 e^t - 2\alpha_2 e^{2t} + 2\alpha_3 e^{-4t} \end{cases}$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$. Finalement, avec la

condition initiale suivante $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 1$, on obtient $\begin{cases} x(t) &= 3/5 e^t + 2/5 e^{-4t} \\ y(t) &= 3/5 e^t - 3/5 e^{-4t} \\ z(t) &= 3/5 e^t + 2/5 e^{-4t} \end{cases}$.

Corrigé de l'exercice 9. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de sorte que $X'(t) = A.X(t)$.

$\text{Sp}(A) = \{i, -i, 1\}$ donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et

$$E_i(A) = \underbrace{\text{Vect} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \quad E_{-i} = \underbrace{\text{Vect} \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_2}, \quad E_1(A) = \underbrace{\text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=v_3}.$$

Les solutions complexes de $X'(t) = A.X(t)$ sont les applications $X : t \mapsto X(t) = \lambda_1 \varphi_1(t) + \lambda_2 \varphi_2(t) + \lambda_3 \varphi_3(t)$ où

$$\varphi_1(t) = e^{it} v_1 = \begin{pmatrix} (1+i)e^{it} \\ 2e^{it} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = e^{-it} v_2 = \begin{pmatrix} (1-i)e^{-it} \\ 2e^{-it} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi_3(t) = e^t v_3 = \begin{pmatrix} e^t \\ 4e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}.$$

A étant à coefficients réelles, donc $\text{Re}(\varphi_1)$, $\text{Im}(\varphi_1)$ sont des solutions réelles de $X'(t) = A.X(t)$. De plus, le Wronskien de

$$(\text{Re}(\varphi_1), \text{Im}(\varphi_1), \varphi_3) \text{ est non nul car } W(t) = \begin{vmatrix} \cos t - \sin t & \cos t + \sin t & e^t \\ 2 \cos t & 2 \sin t & 4e^t \\ 0 & 0 & 2e^t \end{vmatrix} = -4e^t \neq 0.$$

Les solutions réelles de $X'(t) = A.X(t)$ sont les applications $X : t \mapsto X(t) = \lambda_1 \operatorname{Re}(\varphi_1(t)) + \lambda_2 \operatorname{Im}(\varphi_1(t)) + \lambda_3 \varphi_3(t)$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. D'où

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1(t) &= -\lambda_1(\cos t - \sin t) + \lambda_2(\cos t + \sin t) + \lambda_3 e^t \\ x_2(t) &= 2\lambda_1 \cos t + 2\lambda_2 \sin t + 4\lambda_3 e^t \\ x_3(t) &= 2\lambda_3 e^t \end{cases}, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3.$$

2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n

Corrigé de l'exercice 10. Soit $x(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$ une fonction polynôme de degré n ($a_n \neq 0$). On a

$$\begin{aligned} (t^2 + 2t + 2)x''(t) - 2(t+1)x'(t) + 2x(t) &= (n(n-1) - 2n + 2)a_n t^n + \dots \\ &= (n^2 - 3n + 2)a_n t^n + \dots \end{aligned}$$

Si x est solution de l'équation alors nécessairement $n^2 - 3n + 2 = 0$ i.e $n = 1$ ou 2 . Donc les fonctions polynômes solutions sont à rechercher parmi celles de degrés inférieurs à 2 . Soit $x(t) = at^2 + bt + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ à déterminer. On a

$$(t^2 + 2t + 2)x''(t) - 2(t+1)x'(t) + 2x(t) = 4a - 2b + 2c.$$

Donc x est solution si, et seulement si, $c = b - 2a$. Par suite $x(t) = \underbrace{a(t^2 - 2)}_{=\varphi_1(t)} + \underbrace{b(t+1)}_{=\varphi_2(t)}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Or (φ_1, φ_2) forme un s.f.s puisque $W(0) = -2 \neq 0$. D'où la solution générale est $t \mapsto \lambda(t^2 - 2) + \mu(t+1)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 11. La fonction $x(t) = t^\alpha$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$t^2 x''(t) + tx'(t) - x(t) = \alpha(\alpha-1)t^\alpha + \alpha t^\alpha - t^\alpha = (\alpha^2 - 1)t^\alpha.$$

Si x est solution de l'équation alors nécessairement $\alpha = 1$ ou -1 . Donc les fonctions $\varphi_1 : t \mapsto t$ et $\varphi_2 : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont solutions de l'équation. De plus (φ_1, φ_2) forme un s.f.s puisque $W(t) = \frac{-2}{t} \neq 0$. D'où la solution générale est $t \mapsto \lambda t + \mu \frac{1}{t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 12. La fonction $x(t) = t^\alpha$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$t^2 x''(t) - 2x(t) = \alpha(\alpha-1)t^\alpha - 2t^\alpha = (\alpha(\alpha-1) - 2)t^\alpha.$$

Si x est solution de l'équation alors nécessairement $\alpha(\alpha-1) = 2$ donc $\alpha = -1$ ou 2 car $\alpha \in \mathbb{Z}$. Les fonctions $\varphi_1 : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $\varphi_2 : t \mapsto t^2$ sont solutions de l'équation. De plus (φ_1, φ_2) forme un s.f.s puisque $W(t) = 3 \neq 0$. D'où la solution générale est $t \mapsto \lambda t^2 + \mu \frac{1}{t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 13. Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S . La fonction S est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$. On a :

$$\begin{aligned} (t^2 - 2t)S''(t) + 6(t-1)S'(t) + 6S(t) &= (t^2 - 2t) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + 6(t-1) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n \\ &\quad - 6 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} t^n + 6 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n \\ &\quad - 6 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} t^n + 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n(n-1) + 6n + 6)a_n - 2(n(n+1) + 6(n+1))a_{n+1}) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)((n+2)a_n - 2(n+1)a_{n+1}) t^n. \end{aligned}$$

S est solution de l'équation, par unicité du développement en série entière permet alors d'affirmer que S est solution de l'équation si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} a_n.$$

On en déduit par une récurrence immédiate que, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{n+1}{2^n} a_0$.

Inversement, pour pouvoir affirmer qu'une telle série entière définit une solution, il suffit de vérifier que son rayon de convergence R est strictement positif. Or $R = 2$. Ainsi, les solutions de l'équation développables en série entière sont les applications

$$t \mapsto \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} t^n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{t}{2}\right)^{n-1} = \frac{\lambda}{(1-t/2)^2} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 14. 1. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et se dérive terme à terme et pour tout $x \in] -R, R[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

On a :

$$\begin{aligned} x^2 f''(x) + x f'(x) + x^2 f(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n \\ &= a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} (n^2 a_n + a_{n-2}) x^n. \end{aligned}$$

f est solution de l'équation (E) , par unicité du développement en série entière, comme f est solution de (E) , on en déduit : $a_1 = 0$ et $\forall n \geq 2, \quad a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$. Comme, de plus, $a_0 = 1$ par hypothèse, on montre facilement par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2}.$$

2. La série entière $\sum_{n \geq 0} a_{2n} x^{2n}$ converge pour $x = 0$ et, pour $x \neq 0$, on a :

$$\left| \frac{a_{2n+2} x^{2n+2}}{a_{2n} x^{2n}} \right| = \left| \frac{x^2}{4(n+1)^2} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1.$$

Donc par le critère de d'Alembert, on en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est $+\infty$.

3. f est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur le segment $[0, r]$ et donc bornée sur ce segment. f n'est pas la fonction nulle (par unicité du développement en série entière), donc si (f, g) est une famille liée de l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, r[$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda f$ et g est ainsi bornée sur $]0, r[$ et donc au voisinage de 0.

Corrigé de l'exercice 15. Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S . La fonction S est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$. On a :

$$\begin{aligned} tS''(t) + 2S'(t) - tS(t) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-1} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} t^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} t^n \\ &= 2a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)(n+2) a_{n+1} - a_{n-1}) t^n \end{aligned}$$

S est solution de l'équation, par unicité du développement en série entière permet alors d'affirmer que S est solution de l'équation si, et seulement si,

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}.$$

On en déduit par une récurrence immédiate que, $\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \frac{1}{(2p+1)!} a_0$.

Inversement, pour pouvoir affirmer qu'une telle série entière définit une solution, il suffit de vérifier que son rayon de convergence R est strictement positif. Or $R = +\infty$. Ainsi, les solutions de l'équation développables en série entière sont les applications

$$t \mapsto \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n} = \begin{cases} \lambda \frac{\sinh(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ \lambda & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 16. 1. Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S . La fonction S est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$. On a :

$$\begin{aligned} t(t^2 + 1)S''(t) + (t^2 - 1)S'(t) &= t(t^2 + 1) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + (t^2 - 1) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n+1} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} t^n \\ &= -a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) \left((n-1)a_{n-1} + (n+1)a_{n+1} \right) t^n \end{aligned}$$

S est solution de l'équation, par unicité du développement en série entière permet alors d'affirmer que S est solution de l'équation si, et seulement si,

$$-a_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 2, \quad a_{n+1} = -\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}.$$

On en déduit par une récurrence immédiate que, $\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad a_{2p} = \frac{(-1)^{p-1}}{p}a_2$ et $\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p+1} = \frac{(-1)^{p+1}}{2p+1}$.

Par suite

$$\begin{aligned} S(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} t^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} t^{2p+1} \\ &= a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p} t^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} t^{2p+1} \\ &= a_0 + a_2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} t^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p+1} t^{2p+1} \\ &= a_0 + a_2 \ln(1+t^2) - \arctan t \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation développables en série entière sont les applications $t \mapsto \lambda + \mu \ln(1+t^2) - \arctan t$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. On a $|a_n| \leq \max(a_0, a_2, 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite $(a_n)_n$ est bornée et $R \geq 1$. De plus, pour $t = -1$, la série $\sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^{p-1}}{p} t^{2p}$ converge et la série $\sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^{p+1}}{2p+1} t^{2p+1}$ donc la série $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ diverge et $R \leq |-1| = 1$. D'où $R = 1$.

Corrigé de l'exercice 17. On procède au changement de variable $t = e^u$. Soit $x :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z(u) = x(t) = x(e^u)$. La fonction z est deux fois dérivable et

$$x(t) = z(\ln t), \quad x'(t) = \frac{1}{t} z'(\ln t), \quad x''(t) = \frac{1}{t^2} z''(\ln t) - \frac{1}{t^2} z'(\ln t).$$

La fonction x est solution de l'équation sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si,

$$\forall t > 0, \quad z''(\ln t) - 3z'(\ln t) + 2z(\ln t) = 0.$$

La solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation $z''(u) - 3z'(u) + 2z(u) = 0$ est $z(u) = \lambda e^u + \mu e^{2u}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La solution générale de l'équation sur $]0, +\infty[$ est $t \mapsto \lambda t + \mu t^2$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 18. Posons $z = (1+t^2)x$. Soit $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z(t) = (1+t^2)x(t)$. La fonction z est deux fois dérivable et

$$z'(t) = (1+t^2)x'(t) + 2tx(t), \quad z''(t) = (1+t^2)x''(t) + 4tx'(t) + 2x(t).$$

La fonction x est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $z''(t) = 1+t^2$. La solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation $z''(t) = 1+t^2$ est $z(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{12} + \lambda t + \mu$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La solution générale de l'équation sur $\mathbb{R}$ est

$$t \mapsto \frac{t^2}{2(1+t^2)} + \frac{t^4}{12(1+t^2)} + \frac{\lambda t + \mu}{1+t^2} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 19. Sur $I =]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$, on a $t \ln(t)x' + x = 0 \iff x' = -\frac{1}{t \ln(t)}x$. C'est une EDL1. La solution générale sur I est

$$x : t \mapsto \frac{\lambda}{\ln(t)} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Soit $x :]0, +\infty[\setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de l'équation sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$, donc, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in]0, 1[, \quad x(t) = \frac{\lambda}{\ln(t)} \text{ et } \forall t \in]1, +\infty[, \quad x(t) = \frac{\mu}{\ln(t)}.$$

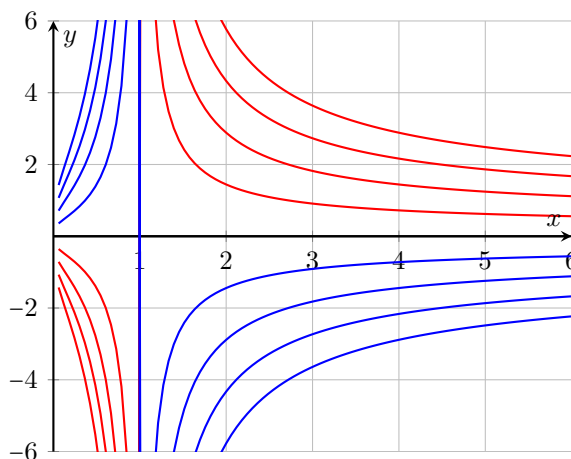
Régularité de la solution sur $]0, +\infty[$:

- Continuité en 1 : $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1^-]{} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$ et $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1^+]{} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } \mu \neq 0 \\ 0 & \text{si } \mu = 0 \end{cases}$.

Le prolongement en 1 est possible si, et seulement si, $\lambda = \mu = 0$ avec $x(1) = 0$.

- Dérivabilité en 1 : Le prolongement en 1 est dérivable en 1.
- Équation différentielle en 1 : $1 \ln(1) \times x'(1) - x(1) = 0$.

La solution générale sur $]0, +\infty[$ est la fonction nulle.



Corrigé de l'exercice 20. 1. Sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, on a $tx' - 2x = t^3 \iff x' - \frac{2}{t}x = t^2$. C'est une EDL1. La solution générale sur I est

$$x : t \mapsto \lambda t^2 + t^3 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

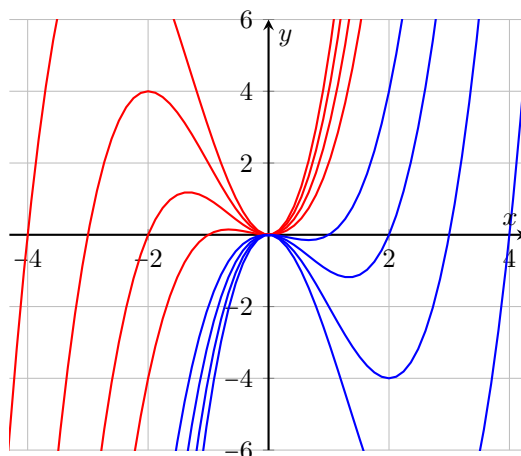
Soit $x : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, donc, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t > 0, \quad x(t) = \lambda t^2 + t^3 \text{ et } \forall t < 0, \quad x(t) = \mu t^2 + t^3.$$

Régularité de la solution sur $\mathbb{R}$:

- Continuité en 0 : $x(t) = \lambda t^2 + t^3 \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$ et $x(t) = \mu t^2 + t^3 \xrightarrow[t \rightarrow 0^-]{} 0$. Le prolongement en 0 est possible avec $x(0) = 0$ sans conditions sur λ et μ .
- Dérivabilité en 0 : $x'(t) = 2\lambda t + 3t^2 \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$ et $x'(t) = 2\mu t + 3t^2 \xrightarrow[t \rightarrow 0^-]{} 0$. Là encore, le prolongement en 0 est dérivable sans conditions sur λ et μ .
- Équation différentielle en 0 : $0 \times x'(0) - 2x(0) = 0$.

La solution générale sur $\mathbb{R}$ est $x : t \mapsto \begin{cases} \lambda t^2 + t^3 & \text{si } t \geq 0 \\ \mu t^2 + t^3 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.



2. Le problème de Cauchy $\begin{cases} tx'(t) &= 2x(t) + t^3 \\ x(0) &= 0 \end{cases}$ a donc une infinité de solutions. À l'opposé, le problème de Cauchy $\begin{cases} tx'(t) &= 2x(t) + t^3 \\ x(0) &= 1 \end{cases}$ n'a aucune solution. On voit ici que le théorème de Cauchy linéaire tombe en défaut en $t = 0$, là où le coefficient t de x' s'annule.

Corrigé de l'exercice 21. 1. Sur I l'équation (H) s'écrit :

$$y'' = \frac{-4}{x}y' + \frac{2-x^2}{x^2}y,$$

c'est une EDL2 homogène à coefficients définis et continus sur I , donc $S_I(H)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2.

2. Soit f une solution de (E) développable en série entière, écrivons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Sur $] -R, R[$, on a :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

donc

$$\begin{aligned} x^2 f''(x) + 4x f'(x) + (2-x^2)f(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 4n a_n x^n + (2-x^2) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} 4n a_n x^n + 2a_0 + 2a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} (2a_n - a_{n-2}) x^n \\ &= 2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} (n(n-1)a_n + (4n+2)a_n - a_{n-2}) x^n \\ &= 2a_0 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n+1)(n+2)a_n - a_{n-2}) x^n \end{aligned}$$

f est solution de (E) , donc

$$\forall x \in]-R, R[, \quad 2a_0 - 1 + 6a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} ((n+1)(n+2)a_n - a_{n-2}) x^n = 0.$$

L'unicité du développement en série entière permet alors d'affirmer que :

$$2a_0 - 1 = 0, \quad a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}.$$

On en déduit par une récurrence immédiate que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \frac{1}{(2p+2)!}$. Ainsi, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)!} x^{2n}$. Le rayon de convergence de cette série entière est > 0 ($= +\infty$), par suite f est solution de (E) sur I .

Par ailleurs, pour $x \in I$, on a

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)!} x^{2n+2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = \frac{1}{x^2} (\cosh(x) - 1).$$

3. Une solution de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et d'une solution de (H) . On a $h \in S_I(H)$ et une autre solution de (H) est donnée par $h_0 = f - g = \frac{\cosh(x)}{x^2}$. Le Wronskien de la famille (h, h_0) est donné par

$$W(x) = \begin{vmatrix} h(x) & h_0(x) \\ h'(x) & h_0'(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{x^4} \neq 0$$

donc le couple (h, h_0) forme un s.f.s de (H) . Ainsi, $S_I(E) = \left\{ g + \lambda h + \mu h_0, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

4. Soit $y \in S_{\mathbb{R}}(H)$.

- La restriction y_0 de y sur I est une solution de (H) sur I , donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 = \lambda h + \mu h_0$ i.e.

$$y_0(x) = \lambda \frac{\cosh(x)}{x^2} + \mu \frac{\sinh(x)}{x^2} \text{ pour tout } x \in I.$$

y est dans $S_{\mathbb{R}}(H)$ donc elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ en particulier en 0. Au voisinage de 0 on a :

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \lambda \frac{\cosh(x)}{x^2} + \mu \frac{\sinh(x)}{x^2} \\ &= \frac{\lambda(1 + 1/2x^2 + o(x^2)) + \mu(x + 1/6x^3 + o(x^3))}{x^2} \\ &= \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{6}x + \frac{\lambda + \mu x}{x^2} + o(x) \end{aligned}$$

qui n'admet de limite en 0 que si $\lambda = \mu = 0$ d'où $y_0 = 0$.

- On montre de même que la restriction y_1 de y sur $]-\infty, 0[$ est nulle.

Donc y est nulle sur $\mathbb{R}^*$ et comme $y(0) = 0$ alors y est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. Ainsi $S_{\mathbb{R}}(H) = \{0\}$ et par suite, $\dim S_{\mathbb{R}}(H) = 0$.

Corrigé de l'exercice 22. 1. On a $\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)' = \frac{\varphi'\varphi_1 - \varphi\varphi_1'}{\varphi_1^2} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi \\ \varphi_1' & \varphi' \end{vmatrix}}{\varphi_1^2} = \frac{W}{\varphi_1^2}$ où W est le Wronskien de (φ_1, φ) .

2. On obtient alors une expression de $\frac{\varphi}{\varphi_1}$ puis de φ comme combinaison linéaire de deux fonctions.

3. Soit φ une solution. Le Wronskien W est solution de $x' + \frac{1}{t}x = 0$. En résolvant cette équation, on obtient $W(t) = \frac{\lambda}{t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

- φ_1 ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$, donc $\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)' = \frac{\lambda}{t^3}$ et par suite $\varphi(t) = -\frac{\lambda}{2t} + \mu t$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.
- Posons $\varphi_2 : t \mapsto \frac{1}{t}$. On vérifie que φ_2 est une solution. De plus, le Wronskien de (φ_1, φ_2) est $\begin{vmatrix} t & 1/t \\ 1 & -1/t^2 \end{vmatrix} = \frac{-2}{t} \neq 0$ donc (φ_1, φ_2) forme un système fondamental de l'équation.

La solution générale de l'équation est $t \mapsto \frac{\lambda}{t} + \mu t$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 23. 1. Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S . La fonction S est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. On injecte dans l'équation

$$t(1-t)S''(t) + (1-3t)S'(t) - S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2(a_{n+1} - a_n)t^n.$$

L'unicité du développement en série entière permet alors d'affirmer que S est solution de l'équation si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n$. On en déduit par une récurrence immédiate que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0$. Cette série entière est de rayon de convergence R égale à 1. Ainsi, les solutions de l'équation développables en série entière sont les applications

$$t \mapsto \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{\lambda}{1-t} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. y est deux fois dérivable sur $]0, 1[$ et $t \mapsto \lambda(t) = (1-t)y(t)$ est deux fois dérivable sur $]0, 1[$:

$$\lambda'(t) = (1-t)y'(t) - y(t), \quad \lambda''(t) = (1-t)y''(t) - 2y'(t)$$

donc $t(1-t)y''(t) + (1-3t)y'(t) - y(t) = 0 \iff t\lambda''(t) + \lambda'(t) = 0$. Ainsi $\lambda'(t) = \frac{\mu}{t}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Par suite, $\lambda(t) = \mu \ln t + \delta$ avec $(\mu, \delta) \in \mathbb{R}^2$. Finalement, la solution générale de (E) sur $]0, 1[$ est $t \mapsto y(t) = \frac{\mu \ln t + \delta}{1-t}$ avec $(\mu, \delta) \in \mathbb{R}^2$.

Corrigé de l'exercice 24. Partie I : Résolution de (Σ) dans le cas complexe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

1. On a $S_\Sigma = \ker P(u)$. Les polynômes $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $(X - \lambda_j)^{\alpha_j}$, avec $i \neq j$, sont premiers entre eux, le théorème de décomposition des noyaux assure que

$$\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^p \ker(u - \lambda_i \text{Id})^{\alpha_i}.$$

Donc $S_\Sigma = \bigoplus_{i=1}^p \ker(u - \lambda_i \text{Id})^{\alpha_i}$ et $\dim S_\Sigma = \dim \ker P(u) = \sum_{i=1}^p \dim \ker(u - \lambda_i \text{Id})^{\alpha_i} = \sum_{i=1}^p \alpha_i = n$. On retrouve que l'espace des solutions est de dimension n .

2. On a $(u - \lambda \text{Id})(x) = 0 \iff u(x) = \lambda x \iff x' - \lambda x = 0 \iff \exists c \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}, x(t) = ce^{\lambda t}$. Ainsi

$$\ker(u - \lambda \text{Id}) = \text{Vect}(t \mapsto e^{\lambda t}).$$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Posons $e_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$. Soit $x \in E$ et $y : t \mapsto e^{-\lambda t} x(t)$ de sorte que $x = e_\lambda y$. On a

$$(u - \lambda \text{Id})(x) = e_\lambda u(y), \quad (u - \lambda \text{Id})^2(x) = e_\lambda u^2(y), \dots, (u - \lambda \text{Id})^\alpha(x) = e_\lambda u^\alpha(y).$$

Donc $x \in \ker(u - \lambda \text{Id})^\alpha \iff y \in \ker u^\alpha$. Or la solution générale de $y^{(\alpha)} = 0$ est

$$y(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_{\alpha-1} t^{\alpha-1} \text{ avec } c_0, \dots, c_{\alpha-1} \in \mathbb{C}.$$

D'où $\ker(u - \lambda \text{Id})^\alpha = \left\{ t \mapsto (c_0 + c_1 t + \dots + c_{\alpha-1} t^{\alpha-1}) e^{\lambda t}, c_0, \dots, c_{\alpha-1} \in \mathbb{C} \right\}$.

4. Comme $S_\Sigma = \bigoplus_{i=1}^p \ker(u - \lambda_i)^{\alpha_i}$ on obtient

$$S_\Sigma = \left\{ t \mapsto \sum_{j=1}^p Q_j(t) e^{\lambda_j t} \text{ où } Q_j \text{ est un polynôme de degré } \leq \alpha_j - 1 \right\}.$$

5. On a $P = X^4 + 2X^3 - 2X - 1 = (X - 1)(X + 1)^3$, donc la solution générale de l'équation est

$$y : t \mapsto c_0 e^t + (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^{-t} \quad \text{avec } c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Partie II : Résolution de (Σ) dans le cas réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

1. On écrit $P = \prod_{j=1}^r (X - \lambda_j)^{m_j} \prod_{k=1}^s (X^2 + a_k X + b_k)^{n_k}$ avec $a_k^2 - 4b_k < 0$ la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$. De même, on obtient

$$S_\Sigma = \bigoplus_{j=1}^r \ker(u - \lambda_j \text{Id})^{m_j} \bigoplus_{k=1}^s \ker(u^2 + a_k u + b_k \text{Id})^{n_k}.$$

Or $x \in \ker(u^2 + a_k u + b_k \text{Id}) \iff x'' + a_k x' + b_k x = 0$. Cette dernière équation est une EDL2 scalaire à coefficients constants dont la solution générale est :

$$t \mapsto (\cos(\beta_k t) + \sin(\beta_k t)) e^{\alpha_k t}.$$

Et $\ker(u^2 + a_k u + b_k \text{Id}) = \text{Vect} \left\{ t \mapsto \cos(\beta_k t) e^{\alpha_k t}, t \mapsto \sin(\beta_k t) e^{\alpha_k t} \right\}$. On obtient de même :

$$\ker(u^2 + a_k u + b_k \text{Id})^{n_k} = \left\{ t \mapsto (R_k(t) \cos(\beta_k t) + S_k(t) \sin(\beta_k t)) e^{\alpha_k t} \right\}$$

où R_k, S_k sont des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré $\leq n_k - 1$. Par suite,

$$S_\Sigma = \left\{ t \mapsto \sum_{j=1}^r Q_j(t) e^{\lambda_j t} + \sum_{k=1}^s (R_k(t) \cos(\beta_k t) + S_k(t) \sin(\beta_k t)) e^{\alpha_k t} \right\}.$$

où Q_j est un polynôme de degré $\leq m_j - 1$ et R_k, S_k sont des polynômes de degré $\leq n_k - 1$.

2. On a $P = X^4 - X^2 + 2X + 2 = (X + 1)^2(X^2 - 2X + 2) = (X + 1)^2(X - 1 - i)(X - 1 + i)$, donc la solution générale de l'équation est

$$y : t \mapsto (c_0 + c_1 t) e^{-t} + (c_3 \cos t + c_4 \sin t) e^t \quad \text{avec } c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de l'exercice 25. 1. v est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} v''(t) + \sigma_n(t)v(t) &= \underbrace{\sqrt{t}u''(t) + \frac{u'(t)}{\sqrt{t}} - \frac{u(t)}{4t\sqrt{t}}}_{=v''(t)} + \left(1 + \frac{1 - 4n^2}{4t^2}\right) \sqrt{t}u(t) \\ &= \frac{1}{t\sqrt{t}} \underbrace{(t^2 u''(t) + t u'(t) + (t^2 - n^2)u(t))}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

2. a. La fonction y_n est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$. On a :

$$\begin{aligned} t^2 y_n'' + t y_n' + (t^2 - n^2) y_n &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+n)(k+n-1) a_k t^{k+n} + \sum_{k=0}^{+\infty} (k+n) a_k t^{k+n} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{k+n+2} - n^2 \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{k+n} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(2n+k) a_k t^{k+n} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{k+n+2} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(2n+k) a_k t^{k+n} + \sum_{k=2}^{+\infty} a_{k-2} t^{k+n} \\ &= (2n+1) a_1 t + \sum_{k=2}^{+\infty} (k(2n+k) a_k + a_{k-2}) t^{k+n} \end{aligned}$$

y_n est solution de l'équation $(\mathcal{B}_n)$, par unicité du développement en série entière permet alors d'affirmer que y_n est solution de l'équation $(\mathcal{B}_n)$ si, et seulement si,

$$a_1 = 0 \text{ et } \forall k \geq 2, (k+2)(2n+k+2) a_{k+2} + a_k = 0 \quad (*).$$

i-e : $a_1 = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}, (k+2)(2n+k+2) a_{k+2} + a_k = 0$.

- b. Récurrence sur $k \in \mathbb{N}$: $a_{2k+1} = 0$ et $a_{2k} = \frac{(-1)^k n!}{2^{2k} k! (n+k)!} a_0$.

Initialisation : Pour $k = 0$, les deux formules sont vraies.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $a_{2k+1} = 0$ et $a_{2k} = \frac{(-1)^k n!}{2^{2k} k! (n+k)!} a_0$. On a d'après (*) :

$$a_{2k+3} = -\frac{a_{2k+1}}{(2k+3)(2n+3+2k)} = 0$$

et

$$\begin{aligned} a_{2k+2} &= -\frac{a_{2k}}{(2k+2)(2n+2+2k)} = -\frac{a_{2k}}{2^2(k+1)(n+1+k)} \\ &= \frac{-1}{2^2(k+1)(n+1+k)} \frac{(-1)^k n!}{2^{2k} k! (n+k)!} a_0 \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{(-1)^{k+1} n!}{2^{2k+2} (k+1)! (n+k+1)!} a_0. \end{aligned}$$

Conclusion : Par le principe de récurrence, $a_1 = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $(k+2)(2n+k+2)a_{k+2} + a_k = 0$.

3. • On a $\left| \frac{1}{(k+1)!(n+k+1)!} k!(n+k)! \right| = \frac{1}{(k+1)(n+k+1)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ donc par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!(n+k)!} z^k$ est $+\infty$.

- Pour $z = 0$, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (n+k)!} z^{2k}$ converge absolument. Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\left| \frac{(-1)^{k+1} z^{2k+2}}{2^{2k+2} (k+1)! (n+k+1)!} \frac{2^{2k} k! (n+k)!}{(-1)^k z^{2k}} \right| = \frac{|z|^2}{4(k+1)(n+k+1)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

donc par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (n+k)!} z^{2k}$ est $+\infty$.

4. On a $J_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+n} k! (n+k)!} t^{2k+n} = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^{k+n}$ avec $(b_k)_k$ la suite définie par : $\begin{cases} b_{2k+1} &= 0 \\ b_{2k} &= \frac{(-1)^k}{2^{2k+n} k! (n+k)!} \end{cases}$. La suite $(b_k)_k$ vérifie les conditions de la question 2 donc par unicité, J_n est solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{B}_n)$.

5. a. $G_n(0) = \frac{1}{n!} > 0$, donc par continuité de G_n (en 0), il existe $\beta > 0$ tel que $G_n(t) > 0$, pour tout $t \in]-\beta, \beta[$.
b. Si $t \geq \beta > 0$ alors $G_n(t) > 0$ car $G_n(t)$ est la somme d'une série à termes > 0 . Si $t \in]-\beta, \beta[$, alors $G_n(t) > 0$. D'où les zéros de la fonction G_n sont dans l'intervalle $]-\infty, -\beta[$.
c. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\left(\frac{t}{2}\right)^n G_n\left(-\left(\frac{t}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{t}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k! (n+k)!} \left(-\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)^k = \left(\frac{t}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (n+k)!} t^{2k} = J_n(t).$$

Si $t > 0$ est zéro de J_n alors $-\frac{t^2}{4}$ est zéro de G_n , donc $-\frac{t^2}{4} \leq -\beta$, soit $t \geq 2\sqrt{\beta}$.

Corrigé de l'exercice 26. Supposons que (E) possède une solution développable en série entière sur $]-r, r[$ (avec $r > 0$), notée $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Pour tout $x \in]-r, r[$, on a :

$$(x^2 - x)f'(x) = (x^2 - x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$$

et

$$x^2 f''(x) = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n.$$

Il vient pour tout $x \in]-r, r[$,

$$\begin{aligned} x^2 f''(x) + (x^2 - x)f'(x) + 2f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2 a_n x^n \\ &= 2a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} ((n^2 - 2n + 2) a_n + (n-1) a_{n-1}) x^n \\ &= 2a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} ((1 + (n-1)^2) a_n + (n-1) a_{n-1}) x^n \end{aligned}$$

Puisque f est solution de (E) , on obtient par unicité du développement en série entière les relations :

$$2a_n = 0 \text{ et } \forall n \geq 1, a_n = \frac{1-n}{1+(n-1)^2} a_{n-1}.$$

On montre par une récurrence immédiate que, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite nulle. En conclusion, on a montré qu'une telle solution est nécessairement la fonction nulle. Il n'existe donc pas de solution non nulle de (E) qui soit développable en série entière au voisinage de 0.

Corrigé de l'exercice 27. 1. Sur $]0, +\infty[$, l'équation homogène associée à (E) est $2xy' - 3y = 0$ à pour solutions les applications :

$$x \longmapsto \lambda \exp\left(\frac{3}{2} \ln x\right) = \lambda x^{3/2} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}.$$

La méthode de variation de la constante permet d'écrire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sous la forme $y(x) = \lambda(x)x^{3/2}$ avec λ fonction dérivable sur $]0, +\infty[$. La fonction λ vérifie sur $]0, +\infty[$ l'équation $2x^{5/2}\lambda'(x) = x^{1/2}$ soit $\lambda(x) = \frac{-1}{2x} + c$ avec $c \in \mathbb{K}$.

Ainsi, les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ sont les fonctions $x \longmapsto \frac{-1}{2}\sqrt{x} + cx^{3/2}$ avec $c \in \mathbb{K}$.

2. Si y est solution de (E) sur $[0, +\infty[$, alors y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et en particulier, dérivable en 0^+ . Or

$$y'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x}} + \frac{3c}{2}\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$$

ce qui interdit à y d'être dérivable en 0. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) sur $[0, +\infty[$ est l'ensemble vide.