

TD N°11

Équations différentielles linéaires

1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 vectorielles

Exercice 1. Soit $(\mathcal{E}) : X'(t) = A(t).X(t) + B(t)$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{1+t^2} & \frac{1}{1+t^2} \\ \frac{-1}{1+t^2} & \frac{t}{1+t^2} \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} \frac{2t^2-1}{1+t^2} \\ \frac{3t}{1+t^2} \end{pmatrix}$.

- Justifier que les fonctions $\varphi_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$ et $\varphi_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ est un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.
- Cherchons une solutions particulière de $(\mathcal{E})$ à l'aide de la méthode de variations des constantes.
- En déduire la solution générale de $(\mathcal{E})$.

Exercice 2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$.

- Déterminer les fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A(t)X(t) \quad (*)$.

Indication : On peut remarquer que $t \mapsto (x + iy)(t)$ vérifie une équation différentielle scalaire du premier ordre.

- Donner une base de l'espace vectoriel S des solutions de $(*)$ à valeurs réelles.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle $(*) : X'(t) = A.X(t) + B(t)$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix}$.

- Résoudre l'équation différentielle homogène associée à $(*)$ et donner un système fondamental de solutions.

Indication : On pourra remarquer que $\text{rg}(A) = 1$.

- Cherchons une solutions particulière de $(*)$ à l'aide de la méthode de variations des constantes.
- En déduire la solution générale de $(*)$.

Exercice 4. Cas d'une matrice possède une unique valeur propre. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Justifier que A admet une unique valeur propre à préciser.

- Résoudre le système différentiel $(\Sigma) : \begin{cases} x'_1(t) = 2x_1(t) + x_3(t) \\ x'_2(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x'_3(t) = -x_1(t) + x_2(t) + 3x_3(t) \end{cases}$.

- Déterminer la solution de (Σ) vérifiant $x_1(0) = 1, x_2(0) = -1, x_3(0) = 0$.

Exercice 5. Cas d'une matrice diagonalisable. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Diagonaliser A .

- Déterminer la solution du système différentiel homogène $(\Sigma_0) : \begin{cases} x'_1(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ x'_2(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t) \\ x'_3(t) = -x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$.

- En déduire la solution du système différentiel $(\Sigma) : \begin{cases} x'_1(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) + e^t \\ x'_2(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) - x_3(t) + e^{2t} \\ x'_3(t) = -x_1(t) + x_2(t) - e^t \end{cases}$.

Exercice 6. Soit l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 3 $(*) : x'''(t) + 4x''(t) + 5x'(t) + 2x(t) = 0$.

1. Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X'(t) = A.X(t)$.
2. Calculer χ_A .
3. Calculer les puissances de A à l'aide de la division euclidienne de X^n par χ_A .
4. En déduire la solution générale de $(*)$.

Exercice 7. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A .

1. Calculer χ_A , puis justifier que $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \ker(I_3 - A) \oplus \ker(2I_3 - A)^2$.
2. Donner une base de $\ker(I_3 - A)$ et une base de $\ker(2I_3 - A)$.
3. En déduire une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \ker(I_3 - A) \oplus \ker(2I_3 - A)^2$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. En déduire la solution général du système différentiel $(\Sigma) : \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) \\ x_3'(t) = x_1(t) - 3x_2(t) + 3x_3(t) \end{cases}$.

Exercice 8. D'après CNC 2017 (Systèmes différentiels linéaires). Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\|\cdot\|$ une norme sous-multiplicative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ pour tout A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que la fonction $f : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $f(t) = \exp(tM)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall t \in I, f'(t) = Mf(t) = f(t)M.$$

2. Soient $t_0 \in I$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une fonction continue. On considère le système différentiel suivant $(\Sigma) : Y'(t) = A.Y(t) + B(t)$.

- a. Montrer, en utilisant un changement de variable convenable, que :

$$Y'(t) = A.Y(t) + B(t) \iff \exp(tA).Z'(t) = B(t).$$

- b. En déduire que les solutions du système différentiel (Σ) sont exactement les applications de la forme :

$$\forall t \in I, Y(t) = \exp(tA).v + \int_{t_0}^t \exp((t-s)A).B(s)ds, \quad \text{où } v \text{ un vecteur de } \mathbb{K}^n.$$

3. On suppose, dans cette question, que A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (non nécessairement distinctes) et soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base formée de vecteurs propres telle que pour tout i , $1 \leq i \leq n$, v_i est associé à λ_i .

Montrer que la solution générale du système différentiel homogène $Y' = A.Y$ est de la forme

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \exp(\lambda_i t) v_i, \quad \text{où } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n.$$

4. **Application :** Résoudre le système différentiel suivant $(\Sigma) : \begin{cases} x'(t) = 2y(t) - z(t) \\ y'(t) = 3x(t) - 2y(t) \\ z'(t) = -2x(t) + 2y(t) + z(t) \end{cases}$ avec la condition initiale suivante $x(0) = 1, y(0) = 0$ et $z(0) = 1$.

Exercice 9. Résoudre sur $\mathbb{R}$, le système différentiel $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + 3x_3(t) \\ x_3'(t) = x_3(t) \end{cases}$. **Indication :** Diagonaliser A sur $\mathbb{C}$.

2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n

Exercice 10. Cherchons les solutions polynomiales sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(t^2 + 2t + 2)x'' - 2(t + 1)x' + 2x = 0$.

Exercice 11. Cherchons les solutions sur $]0, +\infty[$ de la forme $x(t) = t^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ de l'équation $t^2 x'' + tx' - x = 0$.

Exercice 12. D'après CNC MP 2000. Cherchons les solutions sur $]0, +\infty[$ de la forme $x(t) = t^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}$ de l'équation $t^2 x'' - 2x = 0$ et, en déduire l'ensemble de solutions.

Exercice 13. Cherchons les solutions développables en série entière de l'équation $(t^2 - 2t)y'' + 6(t - 1)y' + 6y = 0$.

Exercice 14. D'après CCP PSI 2018. On considère l'équation différentielle $(E) : x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$.

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, avec $a_0 = 1$ de rayon de convergence $R > 0$ et dont la fonction somme f est solution de (E) sur $] -R, R[$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2}$.
2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière obtenue : $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.
3. Soit $r > 0$ et soit g une autre solution de (E) sur $]0, r[$. Montrer que si (f, g) est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, r[$, alors g est bornée au voisinage de 0.

Exercice 15. Cherchons les solutions développables en série entière de l'équation $tx'' + 2x' - tx = 0$.

Exercice 16. Considérons l'équation différentielle $t(t^2 + 1)y'' + (t^2 - 1)y' = 1$.

1. Déterminer une solution de l'équation différentielle développable en série entière.
2. Quel est le rayon de convergence de cette série ?

Exercice 17. Résolution par changement de variable. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation $t^2 x'' - 2tx' + 2x = 0$ en posant $t = e^u$.

Exercice 18. Résolution par changement de fonction inconnue. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(1 + t^2)x'' + 4tx' + 2x = 1 + t^2$ en posant $z = (1 + t^2)x$.

Exercice 19. Problèmes de raccordement. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation $t \ln(t)x' + x = 0$.

Exercice 20. Problèmes de raccordement. On considère l'équation différentielle $tx' - 2x = t^3$.

1. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$.
2. Que dire du problème de Cauchy $\begin{cases} tx'(t) = 2x(t) + t^3 \\ x(0) = 0 \end{cases}$. Même question pour $\begin{cases} tx'(t) = 2x(t) + t^3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$.

Exercice 21. D'après CCINP MP 2024. On considère les équations différentielles :

$$(E) : x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1 \quad \text{et} \quad (H) : x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0.$$

On note $I =]0, +\infty[$, $S_I(E)$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur I et $S_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation (H) sur I .

1. Donner, en justifiant, la dimension de l'espace vectoriel $S_I(H)$.
2. Démontrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur I développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
Vérifier que pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{\cosh(x) - 1}{x^2}$.
3. On note pour $x \in I$, $g(x) = \frac{-1}{x^2}$ et $h(x) = \frac{\sinh(x)}{x^2}$. On admet dans cette question que $g \in S_I(E)$ et $h \in S_I(H)$. Donner, sans calculs, l'ensemble $S_I(E)$.
4. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $S_{\mathbb{R}}(H)$ (solutions de (H) sur $\mathbb{R}$) ?

Exercice 22. La méthode du Wronskien. Soit φ_1 une solution **non nulle** sur I de $(E) : x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t)$ avec $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

1. Soit φ une solution de (E) . Montrer que : $\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)' = \frac{W}{\varphi_1^2}$ où W est le Wronskien de (φ_1, φ) .
2. Expliquer alors comment trouver l'expression de φ .
3. **Application :** Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation $x''(t) + \frac{x'(t)}{t} - \frac{x(t)}{t^2} = 0$, sachant que, $\varphi_1 : t \mapsto t$ est solution.

Exercice 23. Solution particulière à l'aide d'un changement de fonction inconnue. On considère sur $]0, 1[$ l'équation

$$t(1 - t)y'' + (1 - 3t)y' - y = 0.$$

1. Rechercher une solution non nulle φ développable en série entière.

2. Résoudre l'équation par le changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)\lambda(t)$.

Exercice 24. Équations différentielles linéaires scalaires homogènes d'ordre n à coefficients constants. On étudie l'ensemble S_Σ des solutions à valeurs dans $\mathbb{K}$ de l'EDL scalaire homogène d'ordre n à coefficients constants :

$$(\Sigma) : x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t) = 0$$

avec $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et d'inconnue $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ fonction n fois dérivable.

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$.

Partie I : Résolution de (Σ) dans le cas complexe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Considérons l'ev $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(f) = f'$. On écrit $P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer $S_\Sigma = \bigoplus_{i=1}^p \ker(u - \lambda_i)^{\alpha_i}$ puis déterminer $\dim S_\Sigma$.
2. Montrer $\ker(\lambda \text{Id} - u) = \text{Vect}(t \mapsto e^{\lambda t})$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Montrer $\ker(\lambda \text{Id} - u)^\alpha = \left\{ t \mapsto (c_0 + c_1 t + \dots + c_{\alpha-1} t^{\alpha-1}) e^{\lambda t}, \quad c_0, \dots, c_{\alpha-1} \in \mathbb{C} \right\}$.
4. En déduire S_Σ l'ensemble des solutions de (Σ) .

5. Exemple : Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $y^{(4)} + 2y^{(3)} - 2y' - y = 0$.

Partie II : Résolution de (Σ) dans le cas réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les racines réelles de P de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$ et $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$, $1 \leq k \leq s$ les racines non réelles de multiplicités respectives $n_1, \dots, n_s$.

1. Montrer $S_\Sigma = \left\{ t \mapsto \sum_{j=1}^r Q_j(t) e^{\lambda_j t} + \sum_{k=1}^s (R_k(t) \cos(\beta_k t) + S_k(t) \sin(\beta_k t)) e^{\alpha_k t} \right\}$, où Q_j est un polynôme de degré $\leq m_j - 1$ et R_k, S_k sont des polynômes de degré $\leq n_k - 1$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y^{(4)} - y'' + 2y' + 2y = 0$.

Exercice 25. D'après CNC MP 2018. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'équation $(\mathcal{B}_n) : x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$.

On note σ_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\sigma_n(t) = 1 + \frac{1 - 4n^2}{4t^2}$.

1. Soit u une solution, non identiquement nulle, sur $]0, +\infty[$ de $(\mathcal{B}_n)$. Montrer que la fonction $v :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $v(t) = \sqrt{t}u(t)$ est solution de l'équation différentielle $y'' + \sigma_n y = 0$.

2. Si $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, on pose $y_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{n+k}$, $t \in]-R, R[$. On suppose que y_n est solution, sur $] -R, R[$, de $(\mathcal{B}_n)$.

- a. Montrer que $a_1 = 0$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+2)(2n+k+2)a_{k+2} + a_k = 0$.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel k , $a_{2k+1} = 0$ et $a_{2k} = \frac{(-1)^k n!}{2^{2k} k! (n+k)!} a_0$.
3. Calculer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!(n+k)!} z^k$ et $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (n+k)!} z^{2k}$.
4. Justifier que la fonction de Bessel d'indice n , notée J_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad J_n(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (n+k)!} t^{2k}$$

est une solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{B}_n)$.

5. On note G_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!(n+k)!} t^k$.
 - a. Préciser $G_n(0)$ et montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que $G_n(t) > 0$, pour tout $t \in]-\beta, \beta[$.
 - b. Montrer que les zéros de la fonction G_n sont dans l'intervalle $]-\infty, -\beta[$.
 - c. Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $J_n(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^n G_n\left(-\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)$ puis en déduire que les zéros de la fonction J_n , sur l'intervalle $]0, +\infty[$, sont dans l'intervalle $[2\sqrt{\beta}, +\infty[$.

Exercice 26. D'après CCP MP 2016. On considère l'équation différentielle $(E) : x^2 y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$.

Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $] -r, r[$ ($r > 0$) de $\mathbb{R}$?

Exercice 27. D'après CCP MP 2011. On considère l'équation différentielle $(E) : 2xy' - 3y = \sqrt{x}$.

1. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.